VISIT…

М.С.УРМАЕВ

КОСМИЧЕСКАЯ ФОТОГРАММЕТРИЯ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебника для студентов вузов, обучающихся по специальности «Аэрофотогеодезия»

МОСКВА "НЕДРА" 1989

ББК 26.11
У 69
УДК 528.7(202) 075.8)

Рецензенты: д-р техн. наук *В. В. Погорелов*, проф., д-р техн. наук *И. Д. Каргополов*.

Урмаев М. С.

У 69 Космическая фотограмметрия: Учебник для вузов. — М.: Недра, 1989. — 279 с.: ил.

ISBN 5—247—01273—9

Приведены сведения для решения задач координатно-временной привязки результатов космического фотографирования Земли в целях создания топографических, специальных и тематических карт, а также для исследования природных ресурсов. Рассмотрена алгоритмизация основных задач космической фотограмметрии в форме, необходимой для обработки космической информации на ЭВМ. Основное внимание уделено использованию орбитальных методов. Рассмотрены методы определения начальных условий движения ИСЗ (искусственных спутников Земли). Изложена теория совместного определения координат пунктов планеты, элементов внешнего углового ориентирования топографических снимков и начальных условий движения ИСЗ.

Для студентов геодезических вузов.

У $\frac{1802020000—057}{043(01)—89}$ 23—89

ББК 26.11

ISBN 5—247—01273—9

© Издательство «Недра» 1989

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебник написан в соответствии с программой курса «Космическая фотограмметрия» для специальности «Аэрофотогеодезия»; элементы космической фотограмметрии входят также в некоторые курсы, которые изучают студенты специальностей «Исследование природных ресурсов» и «Космическая геодезия». Учебник выходит в свет впервые. Он создан на основе методического опыта преподавания космической фотограмметрии, накопленного на кафедре космической геодезии и навигации Московского ордена Ленина института инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии.

Учебник содержит необходимые сведения, которые позволят студентам самостоятельно решать задачи фотограмметрии, возникающие при съемках из космоса. Главной из них является пространственно-временная привязка точек, дешифрируемых на космических снимках, в целях картографирования и исследования природных ресурсов.

При работе над учебником использованы результаты исследований, выполненных в МИИГАиК, ИКИ Академии наук СССР, ЦНИИГАиК и в ряде других организаций, а также публикации в области космической фотограмметрии.

В первой главе изложены некоторые вопросы векторной алгебры и теории вращений, являющиеся математической базой космической фотограмметрии и необходимые для изучения курса.

При написании седьмой главы, посвященной вопросам построения космической фототриангуляции с одновременным определением орбиты (начальных условий движения носителя), использованы материалы раздела «Спутниковая фотограмметрия» руководства по фотограмметрии (4-е издание) Американского фотограмметрического общества.

Учебник содержит большое количество численных примеров.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время основной информацией для картографирования Земли, Луны и планет, а также для исследований природных ресурсов являются изображения физической поверхности этих тел, полученные специальной съемочной аппаратурой, установленной на искусственных спутниках.

При выполнении съемок из космоса на борту искусственных спутников Земли (ИСЗ) и планет (КА) устанавливают топографические и звездные камеры для синхронного фотографирования поверхности планеты и звездного неба, а также фототелевизионные, телевизионные, оптико-телевизионные камеры и другие виды съемочной аппаратуры.

Развитие методов и средств космических исследований предопределило выделение нового раздела фотограмметрии — космической фотограмметрии.

Основной задачей космической фотограмметрии является построение глобальных высокоточных опорных сетей на Земле и планетах, служащих для решения научных и инженерно-технических задач, картографирования и исследования природных ресурсов Земли (ИПР), Луны и планет из космоса.

Методы и задачи этого раздела фотограмметрии существенно отличаются от традиционных, которые основаны на использовании материалов аэросъемки.

Наиболее существенными особенностями космических съемок по сравнению с аэросъемкой являются:

высоты фотографирования в десятки, а иногда и в сотни раз превышают их величины при аэросъемке;

движение ИСЗ и КА происходит по орбитам в точном соответствии с законами небесной механики, что позволяет определять координаты центров фотографирования путем интегрирования дифференциальных уравнений движения;

ориентация топографических снимков в инерциальном пространстве выполняется автономно, путем синхронного фотографирования звездного неба звездной камерой или при помощи специальных астродатчиков;

в условиях съемки Земли и Луны из космоса оптическая ось топографической камеры с использованием специальных систем стабилизации приближенно отслеживает центр масс планеты с точностью до 2—5°. Однако в общем случае эти углы могут быть значительно бо́льшими, что делает невозможным применение формул плановой аэросъемки.

Таким образом, в теории космической фотограмметрии весьма своеобразно объединяются астрометрия, аналитическая фотограмметрия и небесная механика.

Особую проблему представляют калибровка топографических снимков и определение их угловых элементов внешнего ориентирования. Эти процессы значительно отличаются от аналогичных при аэросъемке.

Построение глобальных космических фототриангуляционных сетей является сложной научно-технической задачей, требующей для своей реализации прецизионных измерений космических снимков и применения самых современных ЭВМ большого быстродействия с достаточными объемами оперативной и внешней памяти.

Исходной информацией для построения маршрутной (орбитальный виток) и блочной (ряд витков) космических фототриангуляций являются перекрывающиеся снимки планеты, синхронные снимки звездного неба, а также математическая модель движения искусственного спутника. Математическая модель движения является объективным схематичным представлением реального движения, позволяющим производить необходимые вычисления для решения поставленной задачи. Модель движения может быть в виде системы трех нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих в правых частях возмущающие ускорения от действия ряда гравитационных и негравитационных сил, определяющих эволюцию орбиты во времени и пространстве. Таким образом, для построения модели движения необходимо априори располагать моделями сил, действующих на КА. При решении задач космической фотограмметрии в подавляющем большинстве случаев модели действующих на него сил полагают известными и не уточняют в процессе построения космической фототриангуляции. В этом случае процесс построения космической фототриангуляции можно рассматривать как своеобразную модификацию орбитального метода космической геодезии. Однако в ряде случаев (например, при съемках Луны) в качестве неизвестных могут быть приняты некоторые гармонические коэффициенты, характеризующие гравитационное поле Луны.

Помимо указанной исходной информации используются также показания лазерного дальномера, установленного на борту спутника, а также и другая измерительная информация.

Начальные условия интегрирования дифференциальных уравнений движения обычно определяют по результатам наземных доплеровских, лазерных и радиотехнических траекторных измерений.

Особенностью космической фототриангуляции является и то, что начальные условия (координаты и составляющие скорости на некоторую начальную эпоху t_0) являются уточняемыми пара-

метрами и вводятся в уравнительные вычисления в качестве неизвестных.

Таким образом, в космической фототриангуляции неизвестными являются элементы внешнего углового ориентирования топографических снимков, координаты точек поверхности планеты и начальные условия интегрирования дифференциальных уравнений движения.

Это значительно уменьшает порядок матрицы нормальных уравнений, поскольку позволяет исключить из уравнительных вычислений координаты центров фотографирования. В процессе уравнивания орбитального блока координаты центров фотографирования в каждой ньютоновской итерации определяют из интегрирования дифференциальных уравнений движения с начальными условиями, определенными в предыдущей итерации.

Самостоятельный интерес может представлять задача определения начальных условий (орбиты) по результатам фотограмметрической обработки снимков при использовании уравнений коллинеарности и компланарности. В случае применения уравнений компланарности устанавливают ориентацию базисов космической съемки, что дает возможность представить начальные условия движения как некоторые функции единичных векторов, задающих направления базисов в планетоцентрической системе координат, жестко связанной с вращающейся планетой.

При определении начальных условий по результатам наземных доплеровских наблюдений с достаточной точностью можно осуществить координатно-временную привязку отдельных точек поверхности планеты без построения сетей космической фототриангуляции. В этом случае выполняют численное интегрирование уравнений движения; полученные координаты ИСЗ интерполируются на моменты фотографирования. Если определяемая точка планеты изобразилась минимум на двух перекрывающихся снимках, ее координаты можно определить путем прямой пространственной засечки с базиса фотографирования, полученного в результате интегрирования. Эта задача соответствует упрощенному орбитальному методу космической геодезии.

Космическая фотограмметрия является мощным инструментом космических исследований, дающим специалистам в области ИПР необходимые исходные данные для построения динамических моделей изучаемых процессов и явлений. Большое значение имеют методы космической фотограмметрии для изучения планет Солнечной системы и Луны, где фотограмметрия, по сути дела, заменяет геодезические методы построения триангуляционных сетей.

Если при обработке сетей космической триангуляции используют расстояния до точек поверхности планеты, измеренные лазерным дальномером, установленным на борту спутника, то мас-

штаб космической фототриангуляции определяется лазерными измерениями.

При отсутствии лазерных измерений масштаб задают планетоцентрической гравитационной постоянной при интегрировании уравнений движения спутника, в соответствии с третьим законом Кеплера

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}},$$

где T — период обращения спутника; a — большая полуось орбиты.

В настоящее время геоцентрическую гравитационную постоянную принимают равной

$$\mu_{\oplus} = fM_{\oplus} = 398\,601{,}2 \cdot 10^9 \text{ м}^3/\text{с}^2;$$

а луноцентрическую гравитационную постоянную —

$$\mu_{\mathbb{C}} = fM_{\mathbb{C}} = 490\,278{,}3 \cdot 10^7 \text{ м}^3/\text{с}^2,$$

где $M_{\oplus}$ и $M_{\mathbb{C}}$ — соответственно массы Земли и Луны; f — универсальная гравитационная постоянная.

Координаты точек планет необходимо иметь в планетоцентрических системах координат, жестко связанных с вращающейся планетой. Поэтому для построения и математической обработки космической фототриангуляции нужно располагать адекватной теорией вращения планеты вокруг своей оси вращения. Для Земли переход от инерциальной системы к системе координат общего земного эллипсоида выполняется путем поворота вокруг оси вращения на угол, численно равный звездному времени в Гринвиче с учетом движения полюсов. Для Луны необходимо учитывать физическую либрацию и другие характеристики ее суточного вращения.

Ориентация снимков звездного неба выполняется в инерциальной системе координат с использованием координат опорных звезд. В связи с этим особое значение приобретает создание специальных каталогов звезд, в которые должно входить большое число звезд северного и южного полушарий. В настоящее время в качестве фундаментального каталога, задающего инерциальную систему координат, принят каталог FK-5, содержащий координаты сравнительно небольшого числа звезд, определенных в результате совместных усилий практически всех обсерваторий Земли, с максимально возможной точностью. В космической геодезии и фотограмметрии используют и другие, менее точные звездные каталоги, содержащие координаты сотен тысяч звезд, определенных с точностью не ниже 0,5″. При этом каталоги обязательно содержат необходимую информацию для редуцирования координат звезд в систему каталога FK-5.

Развитие методов космической фотограмметрии началось почти одновременно с началом космической эры, ознаменовавшейся историческим запуском первого советского спутника 4 октября 1957 г. Уже первые фотографические изображения поверхностей Земли и Луны показали, какие поистине революционные перемены в методах исследования природных ресурсов и специальных видах картографирования открывает съемка из космоса.

Большое значение в развитии методов космической фотограмметрии имели советские и американские программы исследований Луны.

Первые снимки Луны из космоса были получены в октябре 1959 г. советским КА «Луна-3», запущенным 4 октября 1959 г. в ознаменование второй годовщины запуска первого спутника Земли. «Луна-3» выполнила фотографирование обратной стороны Луны, и изображения были переданы на Землю. Так человечество впервые увидело обратную сторону нашего естественного спутника. Качество полученных изображений уступало обыкновенным телескопическим наблюдениям, однако советские ученые, разработав специальную методику устранения искажений и помех, на основании полученной информации создали в 1961 г. первую карту обратной стороны Луны.

Использование космического фотографирования для фотограмметрических целей началось после запуска в СССР в сентябре 1968 г. автоматической межпланетной станции (АМС) «Зонд-5», на которой был установлен комплект фотоаппаратуры с электронным блоком управления. Была решена проблема возвращения автоматической станции на Землю, что дало возможность изучения объектов земной поверхности с помощью прецизионных фотографических оптикоэлектронных систем. Впервые после фотографирования и облета Луны была осуществлена посадка космического аппарата на Землю и проведена высококачественная обработка полученных пленок.

Запуск советских АМС серии «Зонд» был осуществлен в СССР для детальных исследований планет и Луны. Программа начала реализовываться в 1964 г. В апреле 1964 г. «Зонд-1» прошел на расстоянии 100 000 км от Венеры, «Зонд-2», запущенный в ноябре 1964 г., был направлен в сторону Марса. С сентября 1968 г. по октябрь 1970 г. АМС «Зонд-5», «Зонд-6», «Зонд-7» и «Зонд-8» доставили на Землю экспонированную пленку с окололунной орбиты, съемки были выполнены камерой с фокусным расстоянием $f=400$ мм, размер кадра — 130×180 мм. По результатам фотограмметрической обработки этих материалов были созданы маршрутные фотопланы поверхности Луны в масштабе 1 : 2 000 000, а также несколько цветных карт Луны в масштабе 1 : 1 000 000. В процессе обработки информации, полученной космическими аппаратами серии «Зонд», сложились основные принципы и методы отечественной космической фотограмметрии.

Большой вклад в решение этих задач внесли коллектив ученых МИИГАиК, участвовавших в обработке информации, полученной со станций серии «Зонд», под руководством проф. В. Д. Большакова, коллектив ЦНИИГАиК, АН СССР, а также ряд других учреждений, принимавших участие в космических исследованиях.

Параллельно советским исследованиям космического пространства были выполнены американские программы космических исследований, к числу важнейших из которых относятся программы «Лунар — Орбитер» и «Аполлон». Осуществление программы «Аполлон» началось в 1960 г. Национальным агентством аэронавтики и космических исследований (НАСА).

Первый космический корабль (КК) «Аполлон-1» был запущен 11 октября 1968 г. Он был снабжен камерой системы Хассельблат 500EL, спутник совершил 163 оборота вокруг Земли, в результате чего было получено большое количество снимков Земли камерой с фокусным расстоянием $f=80$ мм, помимо того, ряд отдельных участков Земли снят камерой с $f=250$ мм.

21 декабря 1968 г. КК «Аполлон-8» был впервые выведен на окололунную орбиту. Первые КК программы «Аполлон» доставили много ценной информации с поверхности Луны, однако камеры, установленные на них, не обладали точностью, достаточной для построения сетей космической фототриангуляции. Поэтому особый интерес вызвали запущенные позднее КК «Аполлон-15», «Аполлон-16» и «Аполлон-17», на которых была установлена высокоточная аппаратура — панорамные камеры и прецизионные топографические камеры системы Фейрчайлд, а также звездная камера и лазерный дальномер с фиксацией точки отраженного от поверхности планеты импульса. Информация, полученная при съемках Луны, выполненных с почти круговых орбит высотой 100 км, позволила построить высокоточную космическую фототриангуляцию. При этом спутникоцентрические направления на точки поверхности Луны определялись с ошибками, не превышающими 10—15″.

Результаты исследований американских фотограмметристов по созданию теории математической обработки сетей космической фототриангуляции изложены в Руководстве по фотограмметрии (4-е изд.), опубликованном американским обществом фотограмметристов в 1980 г. под общей редакцией Честера Слама [14].

Большое значение в развитии методов космической фотограмметрии имела также американская программа «Скайлэб». Американская орбитальная станция «Скайлэб», запущенная в мае 1978 г., была оборудована специальными камерами для спектрозональной и инфракрасной съемок.

Масштаб спектрозональной съемки, выполненной шестью камерами *S*-190*A*, был 1 : 2 900 000, кроме того, на станции была установлена прецизионная топографическая камера *S*-190*B*. Оба

типа камер имели высокую разрешающую способность ($\approx$80 лин/мм). Высота орбиты составляла 435 км, фокусное расстояние многозональной камеры *S*-190*A* составляет $f_A = 150$ мм, топографической камеры *S*-190*B* — $f_B = 460$ мм, соответственно масштабы съемки были 1 : 2 900 000 и 1 : 945 000, а разрешение на местности 36 м и 12 м. Точность определения планового положения точек местности составляла 30 м для *S*-190*A* и 10 м для *S*-190*B*, а точность определения превышений — 180 м и 20 м соответственно.

Дальнейшие советские и американские исследования планет и комет Солнечной системы выполнялись с использованием телевизионных камер. Теория и методы обработки изображений космических тел, полученных с помощью различных камер (фотографических, телевизионных, фототелевизионных и др.), образуют новую область космических исследований, которую называют космической иконикой. Космической иконике предстоит еще пройти сложный и трудный путь развития, так как именно она должна помочь разрешить многие неразгаданные тайны Солнечной системы.

Глава I

НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ И ТЕОРИИ ВРАЩЕНИЙ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ОПЕРАЦИИ В ОРТОНОРМИРОВАННОМ БАЗИСЕ

В результате выполнения фотограмметрических измерений всегда определяются лишь направления, т. е. единичные векторы, задающие направления в той или иной системе координат. Поэтому операции с единичными векторами в ортогональном базисе являются в аналитической фотограмметрии основными. Единичный вектор меняет свое направление при переходе из одной системы координат в другую. Основной операцией, осуществляющей переход в новую систему координат, является ортогональное преобразование посредством ортогональных матриц. Элементы ортогональной матрицы можно представить в виде функций трех эйлеровых углов. Кроме того, ортогональную матрицу можно описать через параметры вращения пространства, которыми являются направляющие косинусы инвариантной оси вращения и угол поворота пространства. При этом необходимо помнить, что каждый из трех направляющих косинусов инвариантной оси вращения пространства выражается однозначно через две угловые координаты оси вращения. Поэтому число необходимых величин для определения ортогонального преобразования и в этом случае равно трем — две угловые координаты и угол поворота пространства. Наконец, ортогональное преобразование можно выразить через параметры кватерниона, которыми являются направляющие косинусы инвариантной оси вращения и некоторая скалярная величина — тригонометрическая функция угла поворота пространства. Таким образом, и в этом случае число необходимых величин, осуществляющих ортогональное преобразование, равно трем.

Единичный вектор $\bar{r}_i^0$ в ортонормированном базисе. При выборе систем координат для решения задач фотограмметрии очень важно обращать внимание на ориентировку системы координат. Представим наблюдателя, стоящего на плоскости *xoy* головой в сторону положительной оси *oz*, если теперь привести плоскость *xoy* в движение, состоящее из поворота плоскости вокруг оси *oz*, в направлении, установленном ее ориентировкой, и одновременного переноса по ее положительному направлению, то для правой системы координат (положительной) это движение соответствует движению правого винта (рис. 1,*а*), а для левой (отрицательной) — движению левого винта (рис. 1,*б*). Никакими движениями нельзя отрицательную систему совместить с положительной. Во

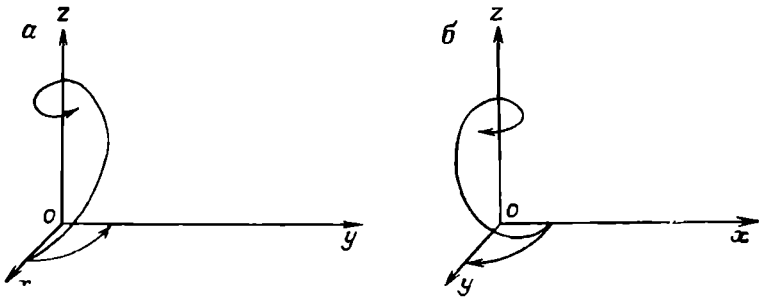

Рис. 1. Правая (*а*) и левая (*б*) системы координат

всем дальнейшем изложении будем использовать только правые (положительные) системы координат.

Рассмотрим правую систему прямоугольных пространственных координат *oxyz*, в которой задано положение точки $i(x_i, y_i, z_i)$.

Введем единичные векторы (орты) $\bar{e}_x$, $\bar{e}_y$ и $\bar{e}_z$, определяющие направления осей. Тогда в силу ортогональности системы координат скалярные произведения ортов удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &\bar{e}_x\bar{e}_y = 0; \quad \bar{e}_x\bar{e}_x = 1; \\ &\bar{e}_x\bar{e}_z = 0; \quad \bar{e}_y\bar{e}_y = 1; \\ &\bar{e}_y\bar{e}_z = 0; \quad \bar{e}_z\bar{e}_z = 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Потребуем, чтобы модули ортов были равны единице, т. е.

$$|\bar{e}_x| = |\bar{e}_y| = |\bar{e}_z| = 1. \tag{2}$$

Базис, удовлетворяющий условиям (1) и (2), называют ортонормированным.

Тогда любой вектор $\bar{r}_i$ (рис. 2), исходящий из начала координат *o*, можно представить в виде разложения по базисным ортам:

$$\bar{r}_i = x_i\bar{e}_x + y_i\bar{e}_y + z_i\bar{e}_z. \tag{3}$$

При этом длину или модуль вектора $\bar{r}_i$ определим как корень квадратный из его скалярного квадрата:

$$r = |\bar{r}_i| = \sqrt{\bar{r}_i\bar{r}_i} = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}. \tag{4}$$

Для вектора, заданного координатами x_i, y_i, z_i в ортонормированном базисе, в дальнейшем будем использовать обозначение

$$\bar{r}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = (x_i, y_i, z_i)^T, \tag{5}$$

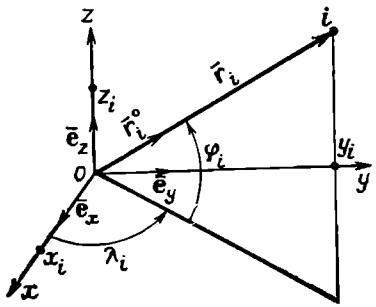

Рис. 2. Вектор в ортонормированном базисе

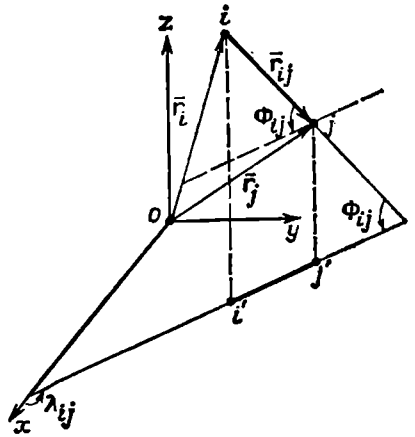

Рис. 3. Ориентирующие углы вектора $\bar{r}_{ij}$

где индекс «т» обозначает операцию транспонирования.

Единичным вектором $\bar{r}_i^0$, определяющим направление в ортонормированном базисе ($\bar{e}_x$, $\bar{e}_y$, $\bar{e}_z$) из начала координат в произвольную точку пространства, называют вектор

$$\bar{r}_i^0 = \frac{1}{|\bar{r}_i|}\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_i \\ m_i \\ n_i \end{pmatrix} = l_i\bar{e}_x + m_i\bar{e}_y + n_i\bar{e}_z. \qquad (6)$$

Величины l_i, m_i, n_i называют направляющими косинусами вектора $\bar{r}_i^0$ и являются косинусами углов, образованных вектором $\bar{r}_i^0$ и осями координат. При этом

$$l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1. \qquad (7)$$

Всякий вектор $\bar{r}_{ij}$, имеющий начало в произвольной точке ортонормированного пространства, можно представить как разность двух векторов, исходящих из начала координат (рис. 3):

$$\bar{r}_{ij} = \bar{r}_j - \bar{r}_i = (x_j - x_i)\bar{e}_x + (y_j - y_i)\bar{e}_y + (z_j - z_i)\bar{e}_z = \begin{pmatrix} x_j - x_i \\ y_j - y_i \\ z_j - z_i \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Введем также полярные координаты (r_i, φ_i, λ_i) вектора $\bar{r}_i$, исходящего из начала координат *о*.

Координата φ_i (широта) — угол, образованный положительным направлением вектора $\bar{r}_i^0$ и проекцией вектора $\bar{r}_i^0$ на плоскость *xoy*. Он отсчитывается против часовой стрелки от плоскости *xoy* до направления $\bar{r}_i^0$. Координата φ_i изменяется в пределах $-90° \leqslant$

$\leqslant\varphi_i\leqslant 90°$. Координата λ_i (долгота) — угол между положительным направлением оси ox и проекцией вектора $\bar{r}_i^0$ на плоскость xoy, отсчитываемый против часовой стрелки. Координата λ_i изменяется в пределах $0°\leqslant\lambda_i\leqslant 360°$. Третьей координатой является модуль вектора $\bar{r}_i$.

В силу ортогональности системы координат $oxyz$ должны выполняться соотношения:

$$\bar{r}_i=x_i\bar{e}_x+y_i\bar{e}_y+z_i\bar{e}_z=r_i\cos\varphi_i\cos\lambda_i\bar{e}_x+$$
$$+r_i\cos\varphi_i\sin\lambda_i\bar{e}_y+r_i\sin\varphi_i\bar{e}_z, \tag{9}$$

или

$$\begin{aligned} x_i&=r_i\cos\varphi_i\cos\lambda_i;\\ y_i&=r_i\cos\varphi_i\sin\lambda_i;\\ z_i&=r_i\sin\varphi_i, \end{aligned} \tag{10}$$

а также

$$\begin{aligned} l_i&=\cos\varphi_i\cos\lambda_i;\\ m_i&=\cos\varphi_i\sin\lambda_i;\\ n_i&=\sin\varphi_i. \end{aligned} \tag{11}$$

Следовательно, единичный вектор $\bar{r}_i^0$ можно выразить через φ_i и λ_i как

$$\bar{r}_i^0=\begin{pmatrix} l_i\\ m_i\\ n_i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi_i\cos\lambda_i\\ \cos\varphi_i\sin\lambda_i\\ \sin\varphi_i\end{pmatrix}, \tag{12}$$

при этом необходимо выполнение условия (8).

Полярные координаты φ_i и λ_i выразим через направляющие косинусы l_i, m_i и n_i единичного вектора $\bar{r}_i^0$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi_i&=\frac{n_i}{\sqrt{l_i^2+m_i^2}};\\ \operatorname{tg}\lambda_i&=\frac{m_i}{l_i}. \end{aligned} \tag{13}$$

Единичный вектор $\bar{r}_{ij}^0$, имеющий начало в произвольной точке пространства, получим аналогично единичному вектору $\bar{r}_i^0$:

$$\bar{r}_{ij}^0=\frac{1}{\sqrt{(x_j-x_i)^2+(y_j-y_i)^2+(z_j-z_i)^2}}\begin{pmatrix}x_j-x_i\\ y_j-y_i\\ z_j-z_i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}l_{ij}\\ m_{ij}\\ n_{ij}\end{pmatrix}. \tag{14}$$

Для вектора $\bar{r}_{ij}$, имеющего начало в произвольной точке пространства, аналогично полярным координатам введем две угловые Φ_{ij} и Λ_{ij}, определяющие его ориентацию в системе координат *oxyz* и называемые ориентирующими углами.

Ориентирующим углом Φ_{ij} называется угол между положительным направлением вектора $\bar{r}_{ij}$ и его проекцией на плоскость *xoy* (вектор $\bar{r}'_{ij}$). Угол Φ_{ij} изменяется в пределах $-90° \leqslant \Phi_{ij} \leqslant 90°$ и отсчитывается против часовой стрелки от проекции вектора $\bar{r}_{ij}$ на плоскость *xoy* до положительного направления $\bar{r}_{ij}$.

Ориентирующий угол Λ_{ij} отсчитывается против часовой стрелки в плоскости *xoy* от положительного направления оси *ox* до проекции вектора $\bar{r}_{ij}$ и изменяется в пределах от 0° до 360°.

Ориентирующие углы Φ_{ij} и Λ_{ij} выразим через прямоугольные координаты:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\Phi_{ij} &= \frac{z_j - z_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}; \\ \operatorname{tg}\Lambda_{ij} &= \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i}. \end{aligned} \tag{15}$$

Поэтому

$$\bar{r}_{ij} = \bar{r}_j - \bar{r}_i = \bar{r}_{ij}\begin{pmatrix} \cos\Phi_{ij} & \cos\Lambda_{ij} \\ \cos\Phi_{ij} & \sin\Lambda_{ij} \\ & \sin\Phi_{ij} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Единичный вектор $\bar{r}^0_{ij}$ выразим через ориентирующие углы, тогда

$$\bar{r}^0_{ij} = \begin{pmatrix} \cos\Phi_{ij} & \cos\Lambda_{ij} \\ \cos\Phi_{ij} & \sin\Lambda_{ij} \\ & \sin\Phi_{ij} \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Скалярное произведение двух единичных векторов $\bar{r}_i^0$ и $\bar{r}_j^0$, исходящих из начала координат. Оно равно сумме произведений соответствующих направляющих косинусов

$$\bar{r}_i^0 \bar{r}_j^0 = l_i l_j + m_i m_j + n_i n_j = \cos\theta \tag{18}$$

и является косинусом угла θ между единичными векторами.

Выразив направляющие косинусы через координаты φ и λ, представим скалярное произведение $(\bar{r}_i^0 \bar{r}_j^0)$ в виде

$$\bar{r}_i^0 \bar{r}_j^0 = \cos\theta = \sin\varphi_i \sin\varphi_j + \cos\varphi_i \cos\varphi_j \cos(\lambda_j - \lambda_i). \tag{19}$$

Этот же результат получим из решения сферического треугольника со сторонами $iz = 90° - \varphi_i$; $jz = 90° - \varphi_j$; $ij = \theta$ по теореме ко-

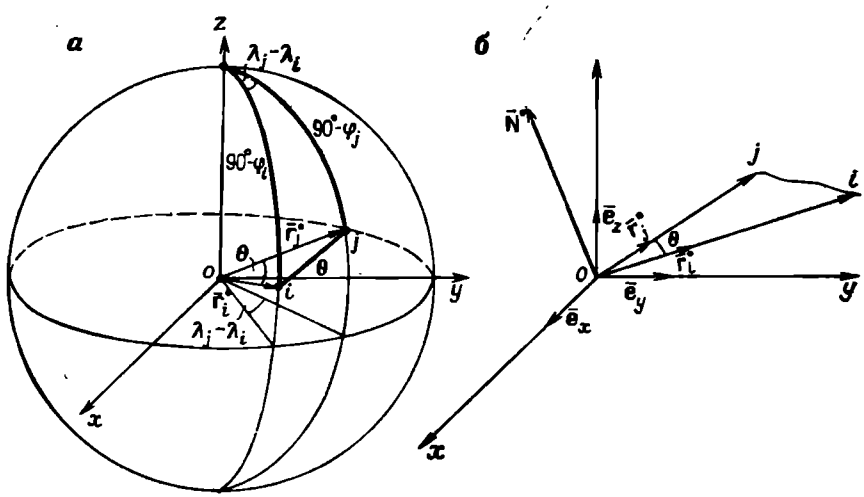

Рис. 4. Скалярное (*а*) и векторное (*б*) произведения единичных векторов

синуса стороны (рис. 4,*а*):

$$\cos\theta=\cos(90°-\varphi_i)\cos(90°-\varphi_j)+\sin(90°-\varphi_i)\sin(90°-$$

$$-\varphi_j)\cos(\lambda_j-\lambda_i)=\sin\varphi_i\sin\varphi_j+\cos\varphi_i\cos\varphi_j\cos(\lambda_j-\lambda_i). \qquad (20)$$

Скалярное произведение двух единичных векторов $\bar{r}_{ij}{}^0$ и $\bar{r}_{ik}{}^0$, исходящих из произвольной точки пространства i, будет выражаться формулой

$$\cos\theta=\bar{r}_{ij}^0\,\bar{r}_{ik}^0=l_{ij}l_{ik}+m_{ij}m_{ik}+n_{ij}n_{ik}=$$

$$=\sin\Phi_{ij}\sin\Phi_{ik}+\cos\Phi_{ij}\cos\Phi_{ik}\cos(\Lambda_{ij}-\Lambda_{ik}), \qquad (21)$$

где Φ_{ij} и Λ_{ij} — ориентирующие углы.

Векторное произведение двух единичных векторов $\bar{r}_i{}^0$ и $\bar{r}_j{}^0$, исходящих из начала координат. Это есть вектор $\bar{N}_{ij}^0$, определяющий направление нормали к плоскости oij (рис. 4,*б*), определяемой этими векторами.

При этом положительное направление нормали $\bar{N}_{ij}^0$ соответствует правому винту для тройки векторов $\bar{r}_i{}^0$, $\bar{r}_j{}^0$, $\bar{N}_{ij}^0$.

Выразим $\bar{N}_{ij}^0$ через направляющие косинусы векторов $\bar{r}_i{}^0$ и $\bar{r}_j{}^0$, получим

$$\bar{N}_{ij}^0=[\bar{r}_i^0\times\bar{r}_j^0]=\frac{1}{\sin\theta}\begin{vmatrix}\bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z\\ l_i & m_i & n_i\\ l_j & m_j & n_j\end{vmatrix}, \qquad (22)$$

где θ — угол между векторами $\bar{\mathbf{r}}_i^0$ и $\bar{\mathbf{r}}_j^0$.

Разложив определитель правой части формулы (22) по минорам базисной строки, представим направляющие параметры L'_{ij}, M'_{ij} и N'_{ij} вектора-нормали $\bar{\mathbf{N}}^0_{ij}$ в виде:

$$\begin{aligned} L'_{ij} &= \begin{vmatrix} m_i & n_i \\ m_j & n_j \end{vmatrix} = m_i n_j - m_j n_i; \\ M'_{ij} &= -\begin{vmatrix} l_i & n_i \\ l_j & n_j \end{vmatrix} = l_j n_i - l_i n_j; \\ N'_{ij} &= \begin{vmatrix} l_i & m_i \\ l_j & m_j \end{vmatrix} = l_i m_j - l_j m_i. \end{aligned} \tag{23}$$

Угол θ выразим через направляющие параметры L'_{ij}, M'_{ij} и N'_{ij}. Будем иметь

$$\sin\theta = \sqrt{L'^2_{ij} + M'^2_{ij} + N'^2_{ij}}. \tag{24}$$

Следовательно, направляющие косинусы вектора-нормали $\bar{\mathbf{N}}^0_{ij}$ можно вычислить по формулам:

$$\begin{aligned} L_{ij} &= \frac{L'_{ij}}{\sin\theta} = \cos\varphi\cos\lambda; \\ M_{ij} &= \frac{M'_{ij}}{\sin\theta} = \cos\varphi\sin\lambda; \\ N_{ij} &= \frac{N'_{ij}}{\sin\theta} = \sin\varphi, \end{aligned} \tag{25}$$

а координаты вектора-нормали $\bar{\mathbf{N}}^0_{ij}$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= \frac{N_{ij}}{\sqrt{L'^2_{ij} + M'^2_{ij}}}; \\ \operatorname{tg}\lambda &= \frac{M_{ij}}{N_{ij}}. \end{aligned} \tag{26}$$

Аналогичные формулы получим для векторного произведения $\bar{\mathbf{N}}^0_{ijk}$ двух единичных векторов $\bar{\mathbf{r}}^0_{ij}$ и $\bar{\mathbf{r}}^0_{ik}$, исходящих из произвольной точки пространства i:

$$\bar{\mathbf{N}}^0_{ijk} = \begin{pmatrix} L_{ijk} \\ M_{ijk} \\ N_{ijk} \end{pmatrix} = [\bar{\mathbf{r}}^0_{ij} \times \bar{\mathbf{r}}^0_{ik}] = \frac{1}{\sin\theta}\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}}_x & \bar{\mathbf{e}}_y & \mathbf{e}_z \\ l_{ij} & m_{ij} & n_{ij} \\ l_{ik} & m_{ik} & n_{ik} \end{bmatrix}; \tag{27}$$

$$\sin\theta = \sqrt{(m_{ij}n_{ik} - m_{ik}n_{ij})^2 + (n_{ij}l_{ik} - l_{ij}n_{ik})^2 + (l_{ij}m_{ik} - l_{ik}m_{ij})^2}; \tag{28}$$

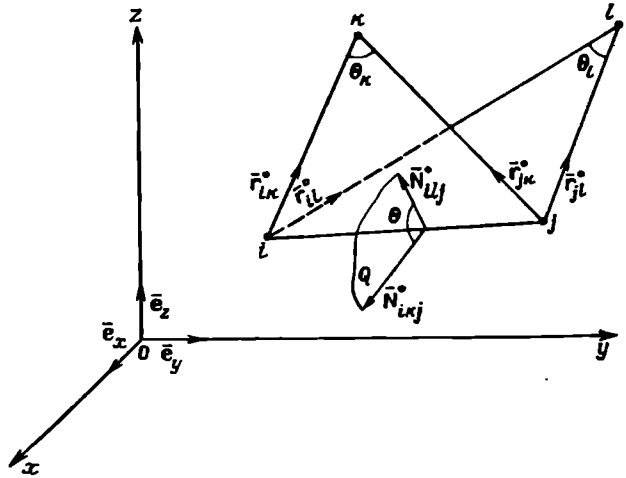

Рис. 5. Линия пересечения двух плоскостей

$$L'_{ijk} = m_{ij}n_{ik} - m_{ik}n_{ij};$$
$$M'_{ijk} = n_{ij}l_{ik} - l_{ij}n_{ik}; \qquad (29)$$
$$N'_{ijk} = l_{ij}m_{ik} - l_{ik}m_{ij},$$

где L'_{ijk}, M'_{ijk} и N'_{ijk} — направляющие параметры вектора-нормали $\bar{N}^0_{ijk}$

Направляющие косинусы вектора-нормали $\bar{\mathbf{N}}^0_{ijk}$ (L_{ijk}, M_{ijk}, N_{ijk}) определим по формулам:

$$L_{ijk} = \frac{L'_{ijk}}{\sin\theta};$$
$$M_{ijk} = \frac{M'_{ijk}}{\sin\theta}; \qquad (30)$$
$$N_{ijk} = \frac{N'_{ijk}}{\sin\theta},$$

а ориентирующие углы — по формулам, аналогичным (26):

$$\operatorname{tg}\Phi_{ijk} = \frac{N_{ijk}}{\sqrt{L^2_{ijk} + M^2_{ijk}}};$$
$$\operatorname{tg}\Lambda_{ijk} = \frac{M_{ijk}}{N_{ijk}}. \qquad (31)$$

Определение направления линии пересечения двух плоскостей. Плоскость *ikj* задана единичными векторами $\bar{\mathbf{r}}^0_{ik}$ и $\bar{\mathbf{r}}^0_{jk}$, а плос-

кость ilj — единичными векторами $\bar{\mathbf{r}}^0_{il}$ и $\bar{\mathbf{r}}^0_{jl}$ (рис. 5). Требуется определить единичный вектор $\bar{\mathbf{r}}^0_{ij}$ линии ij пересечения плоскостей ijk и ilj.

Эта задача, которую иногда называют задачей Вяйсяля, имеет большое значение в космической геодезии и космической фотограмметрии. При ее решении будем исходить из теоремы стереометрии, согласно которой линия $\bar{\mathbf{N}}$ пересечения пучка плоскостей $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, ..., \mathbf{P}_n$ является нормалью к плоскости $\mathbf{Q}$, в которой лежат нормали $\bar{\mathbf{N}}_1, \bar{\mathbf{N}}_2, \ldots, \bar{\mathbf{N}}_n$ к плоскостям $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$.

Нормаль к плоскости ilj является векторным произведением векторов $\bar{\mathbf{r}}^0_{il}$ и $\bar{\mathbf{r}}^0_{jl}$, т. е.

$$\bar{\mathbf{N}}^0_{ilj} = [\bar{\mathbf{r}}^0_{jl} \times \bar{\mathbf{r}}^0_{il}], \tag{32}$$

а нормаль к плоскости ikj — векторным произведением векторов $\bar{\mathbf{r}}^0_{jk}$ и $\bar{\mathbf{r}}^0_{ik}$, тогда

$$\bar{\mathbf{N}}^0_{ikj} = [\bar{\mathbf{r}}^0_{jk} \times \bar{\mathbf{r}}^0_{ik}]. \tag{33}$$

Плоскость $\mathbf{Q}$ задана векторами $\bar{\mathbf{N}}^0_{ilj}$ и $\bar{\mathbf{N}}^0_{ikj}$, поэтому вектор $\bar{\mathbf{r}}^0_{ij}$, определяющий линию пересечения плоскостей, является векторным произведением нормалей к плоскостям

$$\bar{\mathbf{r}}^0_{ij} = [\bar{\mathbf{N}}^0_{ilj} \times \bar{\mathbf{N}}^0_{ikj}], \tag{34}$$

или, подставив в выражение (34) значения $\bar{\mathbf{N}}^0_{ilj}$ и $\bar{\mathbf{N}}^0_{ikj}$ из формул (32) и (33), получим

$$\bar{\mathbf{r}}^0_{ij} = [[\bar{\mathbf{r}}^0_{jl} \times \bar{\mathbf{r}}^0_{il}] \times [\bar{\mathbf{r}}^0_{jk} \times \bar{\mathbf{r}}^0_{ik}]]. \tag{35}$$

Таким образом, линия пересечения двух плоскостей представляет собой векторное произведение векторных произведений единичных векторов, задающих соответствующие плоскости.

При составлении векторных произведений обход необходимо производить, руководствуясь правилом правого винта.

Выразив нормаль $\bar{\mathbf{N}}^0_{ilj}$ через направляющие косинусы векторов $\bar{\mathbf{r}}^0_{jl}$ и $\bar{\mathbf{r}}^0_{il}$, имеем

$$\bar{\mathbf{N}}^0_{ilj} = \begin{pmatrix} L_{ilj} \\ M_{ilj} \\ N_{ilj} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin\theta_l} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}}_x & \bar{\mathbf{e}}_y & \bar{\mathbf{e}}_z \\ l_{jl} & m_{jl} & n_{jl} \\ l_{il} & m_{il} & n_{il} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sin\theta_l} \begin{bmatrix} m_{jl}n_{il} - m_{il}n_{jl} \\ l_{il}n_{jl} - l_{jl}n_{il} \\ l_{jl}m_{il} - l_{il}m_{jl} \end{bmatrix}, \tag{36}$$

где θ_l — угол между векторами $\bar{\mathbf{r}}^0_{jl}$ и $\bar{\mathbf{r}}^0_{il}$. Для нормали $\bar{\mathbf{N}}^0_{ikj}$ аналогично получим

$$\bar{\mathbf{N}}^0_{ikj} = \begin{pmatrix} L_{ikj} \\ M_{ikj} \\ N_{ikj} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin\theta_k} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}}_x & \bar{\mathbf{e}}_y & \bar{\mathbf{e}}_z \\ l_{jk} & m_{jk} & n_{jk} \\ l_{ik} & m_{ik} & n_{ik} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sin\theta_k} \begin{bmatrix} m_{jk}n_{ik} - m_{ik}n_{jk} \\ l_{ik}n_{jk} - l_{jk}n_{ik} \\ l_{jk}m_{ik} - l_{ik}m_{jk} \end{bmatrix}. \tag{37}$$

Тогда направление линии пересечения плоскостей $\bar{\mathbf{r}}^0_{ij}$ представим в виде

$$\bar{\mathbf{r}}^0_{ij} = \begin{pmatrix} l_{ij} \\ m_{ij} \\ n_{ij} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin\theta} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}}_x & \bar{\mathbf{e}}_y & \bar{\mathbf{e}}_z \\ L_{ijl} & M_{ijl} & N_{ijl} \\ L_{ikj} & M_{ikj} & N_{ikj} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} \begin{bmatrix} M_{ijl}N_{ikj} - M_{ikj}N_{ijl} \\ L_{ikj}M_{ijl} - L_{ijl}N_{ikj} \\ L_{ijl}M_{ikj} - L_{ikj}M_{ijl} \end{bmatrix}. \tag{38}$$

Пример 1. Плоскость *ikj* (см. рис. 5) задана векторами $\bar{\mathbf{r}}^0_{ik}$ (1; 6; 12) и $\bar{\mathbf{r}}^0_{fk}$—2; 2; 7), а плоскость *ilj* — векторами $\bar{\mathbf{r}}_{il}$ (0; 7; 5) и $\bar{\mathbf{r}}_{jl}$ (3; 11; 10).

Требуется определить орнентацню в пространстве линии $\bar{\mathbf{r}}^0_{ij}$ пересечения плоскостей, т. е. ориентирующие узлы Φ_{ij} и Λ_{ij}.

Решение.

1. Перейдем к единичным векторам, для чего вычислим направляющие косинусы заданных векторов, т. е. выполнnм их нормирование:

$$l = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; \quad m = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}; \quad n = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

В результате вычнслений определнм значення направляющих косинусов (табл. 1).

Таблица 1

Вектор	l	m	n
$\bar{\mathbf{r}}^0_{ik}$	0,074 3294	0,445 9765	0,891 953
$\bar{\mathbf{r}}^0_{jk}$	—0,264 9065	0,264 9065	0,927 1727
$\bar{\mathbf{r}}^0_{il}$	0,197 8141	0,725 3185	0,659 3805
$\bar{\mathbf{r}}^0_{jl}$	0,0	0,813 7335	0,581 2382

2. Вычислим направляющие параметры L'_{ilj}, M'_{ilj}, N'_{ilj}, угол θ_l и направляющие косинусы L_{ilj}, M_{ilj}, N_{ilj} для плоскости ilj по формулам:

$$L'_{ilj} = m_{jl}n_{il} - m_{il}n_{jl} = 0,114\,977\,2;$$

$$M'_{ilj} = l_{il}n_{jl} - l_{jl}n_{il} = 0,114\,977\,2;$$

$$N'_{ilj} = l_{jl}m_{il} - l_{il}m_{jl} = -0,160\,968;$$

$$\sin\theta_l = \sqrt{L'^2_{ilj} + M'^2_{ilj} + N'^2_{ilj}} = 0,228\,801\,6;$$

$$L_{ilj} = \frac{L'_{ilj}}{\sin\theta_l}; \quad M_{ilj} = \frac{M'_{ilj}}{\sin\theta_l}; \quad N_{ilj} = \frac{N'_{ilj}}{\sin\theta_l};$$

$L_{ilj} = 0,502\,519\,2$; $M_{ilj} = 0,502\,519\,2$; $N_{ilj} = -0,703\,526\,5$.

Контроль: $L^2_{ilj} + M^2_{ilj} + N^2_{ilj} = 1$.

3. Вычислим направляющие параметры L'_{ikj}, M'_{ikj}, N'_{ikj}, угол θ_k и направляющие косинусы L_{ikj}, M_{ikj}, N_{ikj} для плоскости ikj:

$$L'_{ikj} = m_{jk}n_{ik} - m_{ik}n_{jk} = -0,177\,213\,1;$$

$$M'_{ikj} = l_{ik}n_{jk} - l_{jk}n_{ik} = 0,305\,200\,3;$$

$$N'_{ikj} = l_{jk}m_{ik} - l_{ik}m_{jk} = -0,137\,832\,4;$$

$$\sin\theta_k = \sqrt{L'^2_{ikj} + M'^2_{ikj} + N'^2_{ikj}} = 0,378\,879\,3;$$

$$L_{ikj} = \frac{L'_{ikj}}{\sin\theta_k}; \quad M_{ikj} = \frac{M'_{ikj}}{\sin\theta_k}; \quad N_{ikj} = \frac{N'_{ikj}}{\sin\theta_k};$$

$L_{ikj} = -0,467\,729\,7$; $M_{ikj} = 0,805\,534\,4$; $N_{ikj} = -0,363\,789\,8$.

Контроль: $L^2_{ikj} + M^2_{ikj} + N^2_{ikj} = 1$.

4. Вычислим направляющие параметры l'_{ij}, m'_{ij} и n'_{ij}, угол θ и направляющие косинусы вектора $\overline{\mathbf{r}^0}_{ij}$ по формулам:

$$l'_{ij} = M_{ilj}N_{ikj} - M_{ikj}N_{ilj} = 0,383\,903\,4;$$

$$m'_{ij} = L_{ikj}N_{ilj} - L_{ilj}N_{ikj} = 0,511\,871\,5;$$

$$n'_{ij} = L_{ilj}M_{ikj} - L_{ikj}M_{ilj} = 0,639\,839\,7;$$

$$\sin\theta = \sqrt{l'^2_{ij} + m'^2_{ij} + n'^2_{ij}} = 0,904\,869\,7;$$

$$l_{ij} = \frac{l'_{ij}}{\sin\theta}; \quad m_{ij} = \frac{m'_{ij}}{\sin\theta}; \quad n_{ij} = \frac{n'_{ij}}{\sin\theta};$$

$l_{ij} = 0,424\,263\,7$; $m_{ij} = 0,565\,685\,3$; $n_{ij} = 0,707\,107$.

Контроль: $l_{ij}^2 + m_{ij}^2 + n_{ij}^2 = 1$.

5. Вычислнм ориентирующие углы Φ_{ij} и Λ_{ij} вектора $\bar{r}_{ij}^0$ следующим образом

$$\Phi_{ij} = \operatorname{arctg} \frac{n_{ij}}{\sqrt{l_{ij}^2 + m_{ij}^2}} = 45°;$$

$$\Lambda_{ij} = \operatorname{arctg} \frac{m_{ij}}{n_{ij}} = 53,130\,12°.$$

Смешанное (скалярно-векторное) произведение векторов. Условие компланарности трех векторов. Смешанным или скалярно-векторным произведением трех единичных векторов $\bar{r}_{ij}^0$, $\bar{r}_{ik}^0$ и $\bar{r}_{il}^0$ называется выражение

$$F = (\bar{r}_{ij}^0 [\bar{r}_{ik}^0 \times \bar{r}_{il}^0]) = (\bar{r}_{ij}^0 \bar{N}_{ikl}^0). \tag{39}$$

Смешанное векторное произведение можно представить в виде определителя, элементами которого являются направляющие косинусы единичных векторов, а сам он выражает единичный объем, т. е.

$$\mathbf{F} = \begin{vmatrix} l_{ij} & m_{ij} & n_{ij} \\ l_{ik} & m_{ik} & n_{ik} \\ l_{il} & m_{il} & n_{il} \end{vmatrix}. \tag{40}$$

Из выражения (40) следует, что для смешанного векторного произведения справедливо равенство

$$[\bar{r}_{ik}^0 \times \bar{r}_{il}^0] \bar{r}_{ij}^0 = \bar{r}_{ik}^0 [\bar{r}_{il}^0 \times \bar{r}_{ij}^0], \tag{41}$$

т. е. можно изменять последовательность выполнения операции скалярного и векторного произведений местами.

Равенство нулю смешанного векторного произведения вытекает из условия компланарности трех векторов, т. е.

$$F = \begin{vmatrix} l_{ij} & m_{ij} & n_{ij} \\ l_{ik} & m_{ik} & n_{ik} \\ l_{il} & m_{il} & n_{il} \end{vmatrix} = 0. \tag{42}$$

Разложив определитель по элементам первой строки, получим

$$F = l_{ij}(m_{ik}n_{il} - m_{il}n_{ik}) + m_{ij}(l_{il}n_{ik} - l_{ik}n_{il}) +$$

$$+ n_{ij}(l_{ik}m_{il} - l_{il}m_{ik}) = 0. \tag{43}$$

Выражения в круглых скобках являются направляющими параметрами векторного произведения $[\bar{\mathbf{r}}^0_{ik} \times \bar{\mathbf{r}}^0_{il}] = \bar{\mathbf{N}}^0_{ikl}$, а именно:

$$\begin{aligned} L'_{ikl} &= m_{ik}n_{il} - m_{il}n_{ik}; \\ M'_{ikl} &= l_{il}n_{ik} - l_{ik}n_{il}; \\ N'_{ikl} &= l_{ik}m_{il} - l_{il}m_{ik}. \end{aligned} \tag{44}$$

Поэтому условие компланарности можно записать в виде

$$F = l_{ij}L'_{ikl} + m_{ij}M'_{ikl} + n_{ij}N'_{ikl} = 0.$$

§ 2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ВРАЩЕНИЙ

Пусть $\bar{\mathbf{e}}_x$, $\bar{\mathbf{e}}_y$, $\bar{\mathbf{e}}_z$ — любой ортонормированный базис. Рассмотрим единичный вектор $\bar{\mathbf{r}}^0$, заданный в старой (исходной) системе координат,

$$\bar{\mathbf{r}}^0 = l\bar{\mathbf{e}}_x + m\bar{\mathbf{e}}_y + n\bar{\mathbf{e}}_z, \tag{45}$$

и другой единичный вектор $\bar{\mathbf{R}}^0$, заданный в новой (преобразованной) системе координат,

$$\bar{\mathbf{R}}^0 = L\bar{\mathbf{e}}_x + M\bar{\mathbf{e}}_y + N\bar{\mathbf{e}}_z. \tag{46}$$

Связь между направляющими косинусами в новой и старой системах координат выразим в виде

$$\begin{aligned} L &= a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n; \\ M &= a_{21}l + a_{22}m + a_{23}n; \\ N &= a_{31}l + a_{32}m + a_{33}n \end{aligned} \tag{47}$$

или в матричной форме

$$\bar{\mathbf{R}}^0 = \Pi\bar{\mathbf{r}}^0 = [a_{ik}]\bar{\mathbf{r}}^0 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{r}}^0, \tag{48}$$

где Π — ортогональная матрица линейного преобразования (47), которое сохраняет неизменными модули векторов и углы между векторами. Преобразование (48) называется собственным вращением, если определитель матрицы $\det \Pi = 1$. В этом случае преобразование сохраняет относительную ориентацию базисных векторов $\bar{\mathbf{e}}_x$, $\bar{\mathbf{e}}_y$ и $\bar{\mathbf{e}}_z$, т. е. старая правая система координат преобразуется в новую правую, а левая — в левую. Поэтому сохраняются векторное произведение двух векторов и смешанное векторное произведение трех векторов. Таким образом, модули векторов, углы между ними, векторные произведения и смешан-

ные векторные произведения являются инвариантами ортогонального линейного преобразования (48).

Если в преобразовании (48) $\det \Pi = -1$, то оно называется несобственным вращением или вращением с отражением.

Поскольку мы рассматриваем линейные преобразования в ортонормированном базисе, то матрица Π ортогональна, т. е. произведение транспонированной матрицы Π^T и матрицы Π равно единичной матрице E, т. е.

$$\Pi\Pi^T = \Pi^T\Pi = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{49}$$

Таким образом, обращение матрицы Π сводится к ее транспонированию:

$$\Pi^T = \Pi^{-1}. \tag{50}$$

Обратный переход от $\bar{R}^0$ к $\bar{r}^0$ осуществляется линейным преобразованием

$$\bar{r}^0 = \Pi^T\bar{R}^0 = \Pi^{-1}\bar{R}^0 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}. \tag{51}$$

Девять элементов матрицы $\Pi = [a_{ik}]$ ($i, k = 1, 2, 3$) связаны шестью независимыми соотношениями:

$$\begin{aligned} &a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^3 = 1; \\ &a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1; \\ &a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1; \\ &a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} = 0; \\ &a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0; \\ &a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} = 0, \end{aligned} \tag{52}$$

которые являются следствиями ортогональности систем координат, поскольку коэффициенты a_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$) — косинусы углов между осями старой и новой систем координат (табл. 2).

Таблица 2

Координата	x (l)	y (m)	z (n)
X (L)	a_{11}	a_{12}	a_{13}
Y (M)	a_{21}	a_{22}	a_{23}
Z (N)	a_{31}	a_{32}	a_{33}

Из формул (52) следует, что любые три элемента матрицы $\Pi = [a_{ik}]$ определяют все остальные. На этом основании девять элементов матрицы Π можно выразить через три независимых угловых параметра.

Представление ортогональной матрицы Π через параметры вращения. Ортогональную матрицу Π можно представить через параметры вращения, которыми являются угол поворота θ вокруг инвариантной оси вращения $\bar{C}^0$ и направляющие косинусы оси вращения c_1, c_2, c_3. Вектор $\bar{c}^0$ $(c_1, c_2, c_3)^T$ соответствует собственному значению $\lambda = +1$ матрицы Π, которое находят путем приведения ее к диагональному виду. Два остальных собственных значения матрицы Π являются комплексно-сопряженными, т. е.

$$\cos\theta \pm i \sin\theta = e^{\pm i\theta}. \tag{53}$$

Рассмотрим матрицу $\underset{(3\times3)}{\Pi} = [a_{ik}]$ и некоторое неизвестное λ. Тогда матрица $\underset{(3\times3)}{\Pi} - \lambda \underset{(3\times3)}{E}$, где $\underset{(3\times3)}{E}$ — единичная матрица третьего порядка, называется характеристической матрицей ортогональной матрицы Π. Так как в матрице $\lambda \underset{(3\times3)}{E}$ по главной диагонали расположены λ, а все остальные элементы равны нулю, то характеристическая матрица будет иметь вид

$$\underset{(3\times3)}{\Pi} - \lambda \underset{(3\times3)}{E} = \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{bmatrix}, \tag{54}$$

а ее определитель $\det[\underset{(3\times3)}{\Pi} - \lambda \underset{(3\times3)}{E}]$ представляет собой многочлен третьей степени от λ, т. е.

$$\det(\underset{(3\times3)}{\Pi} - \lambda \underset{(3\times3)}{E}) = (-1)^3[\lambda^3 - P_1\lambda^2 + P_2\lambda + (-1)^3 P_3] =$$
$$= -\lambda^3 + P_1\lambda^2 - P_2\lambda + P_3. \tag{55}$$

Многочлен (55) называется характеристическим многочленом матрицы Π, а его корни, действительные и комплексные — собственными значениями матрицы Π.

Ненулевой вектор $c^0 = (c_1, c_2, c_3)$ является собственным вектором матрицы Π, если эта матрица переводит вектор $\bar{c}^0$ в вектор

$$\Pi\bar{c}^0 = \lambda\bar{c}^0, \tag{56}$$

т. е. произведения матрицы Π и вектора $\bar{c}^0$, а также собственного значения λ и вектора $\bar{c}^0$ описывают один и тот же вектор.

Каждому собственному значению λ_i матрицы соответствует свой собственный вектор $\bar{c}_i^0$ $(i = 1, 2, 3)$.

Для того чтобы определить координаты c_1, c_2, c_3 собственного вектора, составим уравнение

$$(\Pi - \lambda \underset{(3\times 3)}{E})\bar{C}^0 = 0. \tag{57}$$

Его можно переписать в виде

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = 0. \tag{58}$$

Выполнив умножение, получим систему линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} &(a_{11}-\lambda)c_1 + a_{12}c_2 + a_{13}c_3 = 0; \\ &a_{21}c_1 + (a_{22}-\lambda)c_2 + a_{23}c_3 = 0; \\ &a_{31}c_1 + a_{32}c_2 + (a_{33}-\lambda)c_3 = 0. \end{aligned} \tag{59}$$

Определитель системы (59) равен нулю, так как при этом условии были определены собственные значения матрицы Π. Следовательно, система (59) имеет бесконечное множество решений и может быть решена с точностью до постоянного множителя.

Если в формулы (59) поочередно подставлять собственные значения λ_1, λ_2, λ_3, то получим координаты трех собственных векторов.

Рассмотрим метод вычисления собственных значений λ_i матрицы Π, основанный на непосредственном развертывании характеристического определителя.

С этой целью развернем определитель матрицы (59). Будем иметь:

$$\begin{aligned} &\det(\Pi - \lambda \underset{(3\times 3)}{E}) = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda) + a_{12}a_{23}a_{31} + \\ &+ a_{13}a_{23}a_{21} - a_{13}a_{31}(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21}(a_{33}-\lambda) - a_{23}a_{32}(a_{11}-\lambda) = \\ &= (-1)^3[\lambda^3 - \lambda^2(a_{11}+a_{22}+a_{33}) + \\ &+ \lambda\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\right) - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{60}$$

Сравнив выражения (55) и (60), получим

$$P_1 = \mathrm{Sp}\,\Pi = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \tag{61}$$

т. е. коэффициент P_1 является суммой диагональных элементов матрицы Π, эта сумма называется *следом матрицы* и обозначается символом $\mathrm{Sp}\,\Pi$ (немецкое *Spur*), коэффициент P_2 является суммой всех диагональных миноров второго порядка матрицы Π,

$$P_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{62}$$

Коэффициент P_3 является определителем матрицы $\mathbf{\Pi}$, который всегда равен единице,

$$P_3 = \det \mathbf{\Pi} = 1. \tag{63}$$

Нетрудно доказать, исходя из свойств ортогональности матрицы $\mathbf{\Pi}$, что в ортонормированном базисе

$$\mathrm{Sp}\, \mathbf{\Pi} = P_1 = P_2, \tag{64}$$

т. е. след ортогональной матрицы всегда равен сумме диагональных миноров.

Поэтому характеристический полином ортогональной матрицы размера 3×3 будет иметь вид

$$-\lambda^3 + P_1\lambda^2 - P_1\lambda + 1 = 0, \tag{65}$$

откуда следует, что ортогональная матрица $\mathbf{\Pi}$ размера 3×3 всегда имеет одно собственное значение $\lambda = 1$.

Двумя другими собственными значениями будут $e^{i\theta}$ и $e^{-i\theta}$. Сумма собственных значений должна быть равна следу матрицы $\mathbf{\Pi}$, т. е.

$$1 + e^{i\theta} + e^{-i\theta} = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \tag{66}$$

но по определению косинуса

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}. \tag{67}$$

Поэтому формулу (66) преобразуем к виду

$$1 + 2\cos\theta = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

откуда

$$\theta = \arccos\frac{1}{2}[\mathrm{Sp}\,\Pi - 1] = \arccos\frac{a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1}{2}. \tag{68}$$

Формула (68) устанавливает связь между элементами матрицы и углом поворота пространства θ.

При этом можно считать, что угол θ лежит в пределах от 0 до π, а любое значение $\theta > 0$ соответствует повороту правого винта в направлении положительной оси вращения.

Собственному значению $\lambda = 1$ соответствует вещественный единичный вектор $\bar{c}^0$, который является решением уравнения

$$\mathbf{\Pi}\bar{c}^0 = \bar{c}^0. \tag{69}$$

Иначе говоря, этот вектор не должен изменяться при повороте пространства, который определяется матрицей $\mathbf{\Pi}$. Вектор $\bar{c}^0$ является осью, вокруг которой совершен поворот пространства. Вся-

кий поворот пространства вокруг начала координат равносилен вращению вокруг оси, проходящей через него.

Выражения для направляющих косинусов c_1, c_2, c_3 собственного вектора $\bar{c}^0$ (соответствующего $\lambda=1$) как функций элементов a_{ik} матрицы Π имеют следующий вид:

$$c_1=\frac{a_{32}-a_{23}}{2\sin\theta};\quad c_2=\frac{a_{13}-a_{31}}{2\sin\theta};\quad c_3=\frac{a_{21}-a_{12}}{2\sin\theta}. \tag{70}$$

Матрицу Π можно представить как функцию параметров вращения θ, c_1, c_2, c_3 в следующем виде:

$$\Pi=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=\cos\theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+$$

$$+(1-\cos\theta)\begin{bmatrix}c_1^2&c_1c_2&c_1c_3\\c_2c_1&c_2^2&c_2c_3\\c_3c_1&c_3c_2&c_3^2\end{bmatrix}+\sin\theta\begin{bmatrix}0&-c_3&c_2\\c_3&0&-c_1\\-c_2&c_1&0\end{bmatrix}. \tag{71}$$

§ 3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ОРТОГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ ЧЕРЕЗ УГЛЫ ЭЙЛЕРА

Выразим теперь элементы a_{ik} матрицы Π через три независимых угловых параметра. Рассмотрим сферу единичного радиуса (рис. 6). Ось *ox* старой системы координат лежит в плоскости экватора, ось *oy* направлена в северный полюс сферы, а ось *oz* лежит в плоскости экватора и дополняет систему *oxyz* до связки правой ориентации. Плоскость *oXY* новой системы координат пересекается с плоскостью экватора *oxy* по линии $\Omega x\Omega'$, которую будем называть линией узлов.

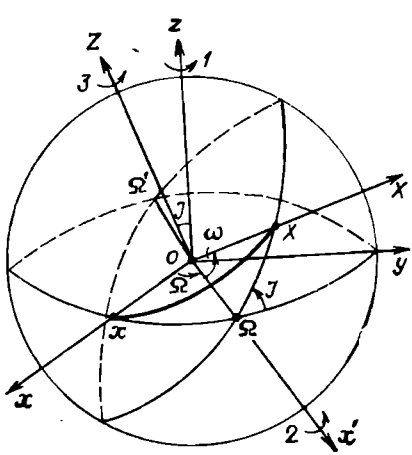

Рис. 6. Эйлеровы углы при преобразовании координат

Система *oXYZ* имеет также правую ориентацию. Преобразование координат системы *oxyz* в *oXYZ* осуществляется в следующей последовательности.

1. Поворотом системы *oxyz* против часовой стрелки вокруг оси *oz* (*1*) на угол Ω, образованный осью *ox* и линией узлов $\Omega o\Omega'$, совмещаем ось *ox'* с линией узлов.

Поскольку поворот совершен вокруг оси oz, являющейся общей для систем $oxyz$ и $ox'y'z'$, то

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Omega & \sin\Omega & 0 \\ -\sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{72}$$

Матрицу вращения, соответствующую повороту на угол Ω, будем обозначать $\mathbf{R}_z(\Omega)$.

2. Повернем систему $ox'y'z'$ вокруг линии узлов (ox') против часовой стрелки на угол J, образованный плоскостью экватора oxy и плоскостью oXY (2).

В результате чего ось oz займет новое положение oZ:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos J & \sin J \\ 0 & -\sin J & \cos J \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \tag{73}$$

Матрицу вращения, соответствующую повороту на угол J, обозначим $\mathbf{R}_x(J)$.

3. Повернем систему $ox''y''z''$ против часовой стрелки вокруг полученной оси oZ (oz) в плоскости oXY на угол ω между линией узлов и направлением новой оси oX, в результате последнего поворота система $oxyz$ совпадает с системой $oXYZ$ (3), т. е.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega & \sin\omega & 0 \\ -\sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}. \tag{74}$$

Матрицу вращения, соответствующую повороту на угол ω, будем обозначать $\mathbf{R}_z(\omega)$. Теперь, объединяя операции (72), (73) в выражении (74), получим

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega & 0 \\ -\sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos J & \sin J \\ 0 & -\sin J & -\sin J \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \cos\Omega & \sin\Omega & 0 \\ -\sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{75}$$

или

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \mathbf{R}_z(\omega)\,\mathbf{R}_x(J)\,\mathbf{R}_z(\Omega) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{76}$$

Поскольку масштаб преобразования принимаем равным единице, то $X^2+Y^2+Z^2=x^2+y^2+z^2$ и

$$\begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix} = \mathbf{R}_z(\omega)\,\mathbf{R}_x(J)\,\mathbf{R}_z(\Omega)\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}, \tag{77}$$

где L, M, N и l, m, n — соответственно направляющие косинусы единичных векторов $\overline{\mathbf{R}}^0$ и $\overline{\mathbf{r}}^0$.

Таким образом,

$$\mathbf{\Pi}=\mathbf{R}_z(\omega)\,\mathbf{R}_x(J)\,\mathbf{R}_z(\Omega). \tag{78}$$

Перемножив матрицы выражения (78), получим элементы a_{ik} матрицы $\mathbf{\Pi}$:

$$\begin{aligned}
a_{11}&=\cos\omega\cos\Omega-\sin\omega\sin\Omega\cos J;\\
a_{12}&=\cos\omega\sin\Omega+\sin\omega\cos\Omega\cos J;\\
a_{13}&=\sin\omega\sin J;\\
a_{21}&=-\sin\omega\cos\Omega-\cos\omega\cos J\sin J;\\
a_{22}&=-\sin\omega\sin\Omega+\cos\omega\cos J\cos\Omega;\\
a_{23}&=\cos\omega\sin J;\\
a_{31}&=\sin\Omega\sin J;\\
a_{32}&=-\cos\Omega\sin J;\\
a_{33}&=\cos J.
\end{aligned} \tag{79}$$

Тот же результат можно получить из решения сферических треугольников, вершинами которых являются точки пересечения осей ox, oy, oz и oX, oY, oZ со сферой единичного радиуса.

Например, элемент a_{11} — косинус угла, образованного осями ox и oX.

Рассмотрим сферический треугольник $x\Omega X$ (см. рис. 7): известны две стороны ($x\Omega=\Omega$ и $\Omega X=\omega$) и угол $\angle x\Omega X=180°-J$. Решив его по теореме косинуса стороны сферического треугольника, найдем, что

$$a_{11}=\cos x\Omega X=\cos\omega\cos\Omega-\sin\omega\cos J\sin\Omega, \tag{80}$$

т. е. получен точно такой же результат, как и при умножении матриц вращения на эйлеровы углы.

Аналогично, применяя теорему косинуса стороны сферического треугольника, можно вычислить все остальные элементы матрицы $\mathbf{\Pi}$.

Из формул (79) выведем соотношения для вычисления эйлеровых углов по заданным элементам a_{ik} матрицы $\mathbf{\Pi}$:

$$\Omega=\operatorname{arctg}\left(\frac{a_{31}}{-a_{32}}\right);\quad J=\arccos a_{33};\quad \omega=\operatorname{arctg}\left(\frac{a_{13}}{a_{23}}\right). \tag{81}$$

Следует отметить, что рассмотренный выбор эйлеровых углов не является единственно возможным. Так, можно один или несколько эйлеровых углов принять отрицательным или заменить дополнительным углом. Вообще, можно показать, что существует двенадцать систем эйлеровых углов.

Углы Ω, J и ω однозначно определяют вращение. При этом угол поворота пространства Θ связан с эйлеровыми углами Ω, J и ω важным соотношением:

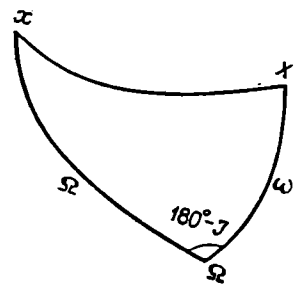

Рис. 7. Сферический треугольник $x\Omega X$

$$\cos\frac{\theta}{2}=\cos\frac{\Omega+\omega}{2}\cos\frac{J}{2}. \tag{82}$$

Пример 2. В системе координат $oxyz$ заданы вектор $\bar{r}=3\bar{e}_x+4\bar{e}_y+6\bar{e}_z$ и эйлеровы углы $\Omega=50°$, $J=40°$ и $\omega=35°$, определяющие ортогональную матрицу $\mathbf{\Pi}$ перехода к новой системе координат $oXYZ$.

Требуется:

1. Вычислить элементы a_{ik} матрицы $\mathbf{\Pi}$ по заданным углам Эйлера.
2. Вычислить параметры вращения: угол поворота θ и направляющие косинусы c_1, c_2, c_3 оси вращения $\bar{c}^0=c_1\bar{e}_x+c_2\bar{e}_y+c_3\bar{e}_z$.
3. Выразить матрицу $\mathbf{\Pi}$ через параметры вращения и сравнить результат с ее выражением через эйлеровы углы.
4. Выразить угол вращения θ через эйлеровы углы.
5. Определить координаты φ и λ единичного вектора $\bar{R}^0$ в новой системе координат.

Решение.

1. Выполним нормирование вектора $\bar{r}$:

$$|\bar{r}|=\sqrt{3^2+4^2+6^2}=7{,}810\,2497;$$

$$l=\frac{3}{|\bar{r}|}=0{,}384\,1106;\qquad m=\frac{4}{|\bar{r}|}=0{,}512\,147\,5;$$

$$n=\frac{-6}{|\bar{r}|}=-0{,}768\,2213;$$

$$l^2+m^2+n^2=1;$$

$$\bar{r}^0=\begin{pmatrix}0.384\,1106\\0{,}512\,1475\\-0{,}768\,2213\end{pmatrix}.$$

2. Вычислим элементы матрицы $\mathbf{\Pi}$:

$a_{11}=\cos\Omega\cos\omega-\sin\Omega\cos J\sin\omega=0{,}189\,9523;$

$a_{12}=\sin\Omega\cos\omega+\cos\Omega\cos J\sin\omega=0{,}909\,9381;$

$a_{13}=\sin J\sin\omega=0{,}368\,6879;$

$a_{21}=-\cos\Omega\sin\omega-\sin\Omega\cos J\cos\omega=-0{,}849\,3859;$

$a_{22}=-\sin\Omega\sin\omega+\cos\Omega\cos J\cos\omega=-0{,}036\,0314;$

$a_{23}=\sin J\cos\omega=0{,}526\,5408;$

$a_{31}=\sin\Omega\sin J=0{,}492\,4039;$

$a_{32}=-\cos\Omega\sin J=-0{,}413\,1759;$

$a_{33}=\cos J=0{,}766\,0444.$

Контроль:

$$a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=1;\quad a_{21}^2+a_{22}^2+a_{23}^2=1;\quad a_{31}^2+a_{32}^2+a_{33}^2=1;$$

$$\omega=\operatorname{arctg}\left(\frac{a_{13}}{a_{23}}\right)=35°;\quad \Omega=\operatorname{arctg}\left(\frac{a_{31}}{-a_{32}}\right)=50°;\quad J=\arccos a_{33}=40°.$$

3. Определим след матрицы Sp и ее диагональные миноры:

$sp=a_{11}+a_{22}+a_{33}=0{,}919\,9653;$

$M_1=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}=0{,}766\,0444;$

$M_2=a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23}=0{,}189\,9523;$

$M_3=a_{11}a_{33}-a_{31}a_{13}=-0{,}036\,0314.$

Контроль: $Sp=M_1+M_2+M_3=0{,}919\,9653.$

4. Вычислим угол поворота пространства θ:

$$\theta=\arccos\frac{sp-1}{2}=92{,}293\,438°.$$

5. Определим направляющие косинусы оси вращения:

$$c_1=\frac{a_{32}-a_{23}}{2\sin\theta}=-0{,}470\,235;$$

$$c_2=\frac{a_{13}-a_{31}}{2\sin\theta}=-0{,}061\,3076;$$

$$c_3=\frac{a_{21}-a_{12}}{2\sin\theta}=-0{,}880\,3672;$$

Контроль: $c_1^2+c_2^2+c_3^2=1.$

6. Найдем следующие матрицы:

$$\Pi_1=\cos\theta\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0{,}040\,0174&0&0\\0&-0{,}040\,0174&0\\0&0&-0{,}0400\end{bmatrix};$$

$$\Pi_2=(1-\cos\theta)\begin{bmatrix}c_1^2&c_1c_2&c_1c_3\\c_2c_1&c_2^2&c_2c_3\\c_3c_1&c_3c_2&c_3^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}229\,9697&0{,}030\,2761&0{,}430\,5459\\0{,}030\,2761&0{,}003\,9860&0{,}056\,6824\\0{,}430\,5459&0{,}056\,6824&0{,}806\,0617\end{bmatrix};$$

$$\Pi_3=\sin\theta\begin{bmatrix}0&-c_3&c_2\\c_3&0&-c_1\\-c_2&c_1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0{,}879\,662&-0{,}061\,8580\\-0{,}879\,662&0&0{,}469\,8583\\0{,}061\,858&-0{,}469\,8583&0\end{bmatrix};$$

$$\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3=\Pi.$$

Следовательно, получим

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0.189\,9523 & 0.909\,9381 & 0.368\,6879 \\ -0.849\,3860 & -0.036\,0314 & 0.526\,5408 \\ 0.492\,4039 & -0.413\,1759 & 0.766\,0444 \end{bmatrix},$$

сравнив результат с вычислениями второго пункта, убеждаемся в полной тождественности элементов.

7. Определим направляющие косинусы вектора $\bar{R}^0$ в новой системе координат

$$\bar{R}^0 = \begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix} = \Pi \bar{r}^0 = \begin{bmatrix} 0.189\,9523 & 0.909\,9381 & 0.368\,6879 \\ -0.849\,3860 & -0.036\,0314 & 0.526\,5408 \\ 0.492\,4039 & -0.413\,1759 & 0.766\,0444 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 0.384\,1106 \\ 0.512\,1475 \\ -0.768\,2213 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.255\,7513 \\ -0.749\,2114 \\ -0.610\,9611 \end{bmatrix}.$$

8. Вычислим координаты φ и λ вектора $\bar{R}$:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{N}{\sqrt{L^2 + M^2}} = -37.659\,03°;$$

$$\lambda = \operatorname{arctg} \frac{M}{L} = -71.152\,114°.$$

§ 4. КВАТЕРНИОНЫ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ТЕОРИИ ВРАЩЕНИЙ

Кватернионом называется гиперкомплексное число, геометрически реализуемое в четырехмерном пространстве. Система кватернионов была создана в 1843 г. У. Гамильтоном и явилась первой обобщающей комплексные числа. Кватернионы были незаслуженно забыты и до 60-х годов нашего столетия практически не использовались. Начиная с середины 60-х годов кватернионы начинают интенсивно применять в аналитической фотограмметрии и других прикладных науках. В настоящее время кватернионное исчисление является составной частью математического аппарата современной космической фотограмметрии и космической геодезии.

Кватернионы позволяют весьма эффективно решать задачи, связанные с композициями вращений пространства. Они имеют ряд несомненных преимуществ по сравнению с описанием вращений при помощи эйлеровых углов, поскольку дают возможность получить сразу координаты вектора в новой системе координат при повороте пространства на угол Θ вокруг некоторой инвариантной оси $\bar{c}^0$.

Кватернионы образуют четырехмерную алгебру над полем действительных чисел с базисом $(1, \bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$. Обозначения приняты те же, что и ранее. Вообще говоря, $\bar{e}_x$, $\bar{e}_y$ и $\bar{e}_z$ могут иметь гораздо более общий смысл, чем орты в ортонормированном базисе.

В кватернионной алгебре вводятся следующие правила умножения базисных единиц:

$$\begin{array}{llll} 1\cdot 1=1 & 1\cdot\bar{\mathbf{e}}_x=\bar{\mathbf{e}}_x & 1\cdot\bar{\mathbf{e}}_y=\bar{\mathbf{e}}_y & 1\cdot\bar{\mathbf{e}}_z=\bar{\mathbf{e}}_z \\ \bar{\mathbf{e}}_x\cdot 1=1 & \bar{\mathbf{e}}_x\cdot\bar{\mathbf{e}}_x=-1 & \bar{\mathbf{e}}_x\cdot\bar{\mathbf{e}}_y=\bar{\mathbf{e}}_z & \bar{\mathbf{e}}_x\cdot\bar{\mathbf{e}}_z=-\bar{\mathbf{e}}_y \\ \bar{\mathbf{e}}_y\cdot 1=1 & \bar{\mathbf{e}}_y\cdot\bar{\mathbf{e}}_x=-\bar{\mathbf{e}}_z & \bar{\mathbf{e}}_y\cdot\bar{\mathbf{e}}_y=-1 & \bar{\mathbf{e}}_y\cdot\bar{\mathbf{e}}_z=\bar{\mathbf{e}}_x \\ \bar{\mathbf{e}}_z\cdot 1=1 & \bar{\mathbf{e}}_z\cdot\bar{\mathbf{e}}_x=\bar{\mathbf{e}}_y & \bar{\mathbf{e}}_z\cdot\bar{\mathbf{e}}_y=-\bar{\mathbf{e}}_x & \bar{\mathbf{e}}_z\cdot\bar{\mathbf{e}}_z=-1 \end{array} \qquad (83)$$

Из соотношений (83) следует, что

$$\bar{\mathbf{e}}_x^2=\bar{\mathbf{e}}_y^2=\bar{\mathbf{e}}_z^2=\bar{\mathbf{e}}_x\bar{\mathbf{e}}_y\bar{\mathbf{e}}_z=-1, \qquad (84)$$

где порядок сомножителей в произведении $\bar{\mathbf{e}}_x\bar{\mathbf{e}}_y\bar{\mathbf{e}}_z$ строго фиксирован.

Следствием формул (83) также является

$$\bar{\mathbf{e}}_x\bar{\mathbf{e}}_y=-\bar{\mathbf{e}}_y\bar{\mathbf{e}}_x=\bar{\mathbf{e}}_z;\quad \bar{\mathbf{e}}_y\bar{\mathbf{e}}_z=-\bar{\mathbf{e}}_z\bar{\mathbf{e}}_y=\bar{\mathbf{e}}_x;\quad \bar{\mathbf{e}}_z\bar{\mathbf{e}}_x=-\bar{\mathbf{e}}_x\bar{\mathbf{e}}_z=\bar{\mathbf{e}}_y. \qquad (85)$$

Любой кватернион Q может быть представлен в следующем виде:

$$Q=A+c_1\bar{\mathbf{e}}_x+c_2\bar{\mathbf{e}}_y+c_3\bar{\mathbf{e}}_z. \qquad (86)$$

При этом различают скалярную часть кватерниона A и векторную

$$\bar{\mathbf{c}}^0=c_1\bar{\mathbf{e}}_x+c_2\bar{\mathbf{e}}_y+c_3\bar{\mathbf{e}}_z. \qquad (87)$$

Следовательно,

$$Q=A+\bar{\mathbf{c}}^0. \qquad (88)$$

Если A=0, то кватернион является вектором, что свидетельствует о наличии тесной связи между кватернионным и векторным исчислениями (исторически векторное исчисление возникло из кватернионного).

Кватерниону можно противопоставить сопряженный кватернион

$$Q^{-1}=A-c_1\bar{\mathbf{e}}_x-c_2\bar{\mathbf{e}}_y-c_3\bar{\mathbf{e}}_z=A-\bar{c}^0, \qquad (89)$$

при этом

$$QQ^{-1}=Q^{-1}Q=A^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2. \qquad (90)$$

Величина QQ^{-1} является действительным числом и называется нормой кватерниона и обозначается $N(Q)$. Норма кватерниона $N(Q)$ удовлетворяет соотношению

$$N(Q_1Q_2)=N(Q_1)N(Q_2). \qquad (91)$$

Любое вращение трехмерного пространства вокруг начала координат может быть задано при помощи кватерниона q с нормой, равной 1. Вращение, соответствующее нормированному кватерниону q, преобразует вектор $\bar{r}^0 = l\bar{e}_x + m\bar{e}_x + n\bar{e}_z$ в вектор $\bar{R}^0 = L\bar{e}_x + M\bar{e}_y + N\bar{e}_z$, т. е.

$$\bar{R}^0 = q\bar{r}^0 q^{-1} = L\bar{e}_x + M\bar{e}_y + N\bar{e}_z. \tag{92}$$

Перейдем к рассмотрению алгоритма, описывающего кватернионный поворот пространства в ортонормированном базисе.

Пусть направление на точку пространства до поворота задано единичным вектором $\bar{r}^0 = l\bar{e}_x + m\bar{e}_y + n\bar{e}_z$, известны угол θ поворота пространства и направляющие косинусы c_1, c_2 и c_3 оси вращения $\bar{c}^0 = c_1\bar{e}_x + c_2\bar{e}_y + c_3\bar{e}_z$. Требуется определить направляющие косинусы единичного вектора $\bar{R}^0 = L\bar{e}_x + M\bar{e}_y + N\bar{e}_z$, в который перешел вектор $\bar{r}^0$ в результате поворота оси $\bar{c}^0$ на угол θ.

Рассмотренному повороту соответствует нормированный кватернион q:

$$q = \frac{1}{N}(A + c_1\bar{e}_x + c_2\bar{e}_y + c_3\bar{e}_z) = a + b\bar{e}_x + c\bar{e}_y + d\bar{e}_z, \tag{93}$$

где

$$A = N\cos\frac{\theta}{2}; \quad N = \sqrt{A_1^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2},$$

откуда

$$N = \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}; \quad A = \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}. \tag{94}$$

Сопряженный нормированный кватернион q^{-1} будет иметь вид

$$q^{-1} = \frac{1}{N}(A - c_1\bar{e}_x - c_2\bar{e}_y - c_3\bar{e}_z). \tag{95}$$

Тогда вектор $\bar{R}^0$ можно определить по формуле

$$\bar{R}^0 = q\bar{r}^0 q^{-1}, \tag{96}$$

где при умножении компонент следует руководствоваться правилами (83).

На основании соотношений (83) можно получить следующее выражение для умножения кватернионов:

$$q_1q_2 = (a_1 + b_1\bar{e}_x + c_1\bar{e}_y + d_1\bar{e}_z)(a_2 + b_2\bar{e}_x + c_2\bar{e}_y + d_2\bar{e}_z) =$$
$$= (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + a_2b_1 + c_1d_2 - d_1c_2)\bar{e}_x +$$
$$+ (a_1c_2 + a_2c_1 - b_1d_2 + b_2d_1)\bar{e}_y + (a_1d_2 + a_2d_1 + b_1c_2 - b_2c_1)\bar{e}_z. \quad (97)$$

Пусть требуется совершить два последовательных поворота пространства на углы θ_1 и θ_2 вокруг осей $\bar{c}_1^0$ и $\bar{c}_2^0$. Тогда поворот на угол θ_1 можно представить в виде преобразования вектора $\bar{r}^0$ в $\bar{R}_1^0$, т. е.

$$\bar{R}_1^0 = q_1\bar{r}^0q_1^{-1}, \quad (98)$$

а второй поворот на угол θ_2 будет выражаться формулой

$$\bar{R}_2^0 = q_2(q_1\bar{r}^0q_1^{-1})q_2^{-1} = (q_1q_2)\bar{r}^0(q_1q_2)^{-1} = Q_2\bar{r}^0Q_1^{-1}. \quad (99)$$

Следовательно, результирующий поворот определяется кватернионом

$$\theta_2 = q_1q_2, \quad (100)$$

т. е. композиции поворотов однозначно отвечает произведение кватернионов в соответствующем порядке, определяющих частные вращения.

Пример 3.

Рассмотрим схему вычислений, соответствующую кватернионному повороту пространства вокруг некоторой оси $\bar{c}^0$ на угол θ.

Пусть в системе координат $oxyz$ задан вектор $\bar{r} = 3\bar{e}_x + 4\bar{e}_y - 6\bar{e}_z$, ось вращения пространства $\bar{c}^0 = c_1\bar{e}_x + c_2\bar{e}_y + c_3\bar{e}_z = -0{,}470\,235\bar{e}_x - 0{,}061\,907\,6\bar{e}_y - 0{,}880\,367\,2\bar{e}_z$ и угол $\theta = 92{,}293\,438$.

Требуется определнть вектор $\bar{R}^0$, его координаты φ и λ, определяющие направление в новой системе координат $oXYZ$.

Решение.

1. В соответствии с изложенным выше данному вращению будет соответствовать кватернион q,

$$q = A + c_1\bar{e}_x + c_2\bar{e}_y + c_3\bar{e}_z,$$

где $A = \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} = 0{,}960\,7522$, т. е. $q = 0{,}960\,7522 - 0{,}470\,235\bar{e}_x - 0{,}061\,9076\bar{e}_y - 0{,}880\,3672\bar{e}_z$, норма которого

$$N = \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{1{,}386\,7389} = 0{,}721\,1163.$$

Получим нормированное значение q:

$$q = 0{,}692\,8140 - 0{,}339\,0941\bar{e}_x - 0{,}044\,6426\bar{e}_y - 0{,}634\,8471\bar{e}_z.$$

Контроль: $A^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$.

2. Сопряженный кватернион q^{-1} будет следующим: $q^{-1}=0{,}692\,8140+0{,}339\,0941\bar{e}_x+0{,}044\,6426\bar{e}_y+0{,}634\,8471\bar{e}_z$.

3. Номируя вектор $\bar{r}$, получнм исходный единичный вектор $\bar{r}^0=0{,}384\,1106\bar{e}_x+0{,}512\,1475\bar{e}_y-0{,}768\,2213\bar{e}_z$.

4. Вычислим вектор $\bar{R}^0$ по соотиошению $\bar{R}^0=q\bar{r}^0q^{-1}$.

Для этого сначала определим $q_n\bar{r}^0$ (вычисления приведены в таблнчной форме).

	a	b	c	d
c_n	0,692 8140	—0,339 0941	—0,044 6426	—0,634 8471
$\bar{r}^0$	0,0	0,384 1106	0,512 1475	—0,768 2213
$q_n\bar{r}^0$	—0,334 5884	0,625 5470	20,149 5271	—0,688 753

Вычисления $q_n\bar{r}^0$ производим по формуле (97); a, b, c, d — обозначения формулы (97).

Далее точно так же вычисляем $\bar{R}^0$:

	a	b	c	d
$q_n\bar{r}^0$	—0,334 5884	0,625 5460	—0,149 5271	—0,688 753
q_n^{-1}	0,692 8140	0,339 0941	0,044 6426	0,634 8471
$\bar{R}^0=q_n\bar{r}^0q^{-1}$	0,000 0013	0,255 7516	—0,749 2101	—0,610 9604

Таким образом, получены b, c, d, являющиеся направляющими косинусами вектора $\bar{R}^0$: $L=0{,}255\,7516$, $M=-0{,}749\,2101$, $N=0{,}610\,9604$. При этом в результате вычнслений $L^2+M^2+N^2=0{,}999\,9973$, что объясняется наличием ошибок округления. Следствием ошнбок округлення является также вычисленное значение $a=0{,}000\,0013$ (должно быть получено a, равное нулю, так как через a обозначено A).

5. Вычнслнм координаты φ и λ вектора $\bar{R}$:

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{N}{\sqrt{L^2+M^2}}=-37{,}659\,039^\circ;\quad \lambda=\operatorname{arctg}\frac{M}{L}=-71{,}152\,063^\circ.$$

Сравнив полученные результаты с соответствующими примера 2, убеждаемся, что расхождения составляют: $|\delta\varphi|=0{,}000009^\circ=0{,}03''$, $|\Delta\lambda|=0{,}000051^\circ=0{,}18''$, что всегда допустимо на практике.

§ 5. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦЫ ВРАЩЕНИЯ ЧЕРЕЗ КОМПОНЕНТЫ КВАТЕРНИОНА

Выразим элементы a_{ik} матрицы вращения Π через элементы нормированного кватерниона с нормой $N=1$, т. е. при условии, что $A^2+c_1^2+c_2^2+c_3^2=1$. Воспользуемся для этого основным кватер-

нионным преобразованием

$$\bar{\mathbf{R}}^0 = q_n \bar{\mathbf{r}}^0 q_n^{-1}, \tag{101}$$

где

$$\begin{aligned} q_n &= A + c_1\bar{\mathbf{e}}_x + c_2\bar{\mathbf{e}}_y + c_3\bar{\mathbf{e}}_z = A + \bar{\mathbf{c}}^0; \\ \bar{\mathbf{r}}^0 &= 0 + l\bar{\mathbf{e}}_x + m\bar{\mathbf{e}}_y + n\bar{\mathbf{e}}_z; \\ q_n^{-1} &= A - c_1\bar{\mathbf{e}}_x - c_2\bar{\mathbf{e}}_y - c_3\bar{\mathbf{e}}_z = A - \bar{\mathbf{c}}^0. \end{aligned} \tag{102}$$

Если подставить значения q_n, $\bar{\mathbf{r}}^0$ и q_n^{-1}, определяемые соотношениями (102), в (101) и выполнить кватернионное умножение по правилам (83) и (97), то ортогональную матрицу $\Pi = [a_{ik}]$ можно выразить через a, b, c и d следующим образом:

$$\Pi = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2(bc - ad) & 2(bd + ac) \\ 2(bc + ad) & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2(cd - ab) \\ 2(bd - ac) & 2(cd + ab) & a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{bmatrix}. \tag{103}$$

Полученная форма представления матрицы Π называется родригесовой формой ортогональной матрицы, а сама матрица Π (103) — матрицей Родригеса.

На основании выражения (103) можно представить эйлеровы углы как функции параметров вращения θ, c_1, c_2 и c_3:

$$\begin{aligned} \Omega &= \operatorname{arctg}\left(\frac{a_{31}}{-a_{32}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{bd - ac}{-cd - ab}\right); \\ J &= \arccos a_{33} = \arccos(a^2 - b^2 - c^2 + d^2); \\ \omega &= \operatorname{arctg}\left(\frac{a_{13}}{a_{23}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{bd + ac}{cd + ab}\right). \end{aligned} \tag{104}$$

Пример 4. Представить ортогональную матрицу Π (см. пример 2) через параметры кватерниона q.

Для данного вращения на основании вычислений, выполненных в примере 2, получим следующие параметры вращения:

угол поворота пространства $\theta = 92{,}293\,438°$;

направляющие косинусы оси вращения: $c_1 = -0{,}470\,235$; $c_2 = -0{,}061\,9076$; $c_3 = -0{,}880\,3672$.

Решение.

1. Найдем скалярную компоненту кватерниона

$$A = \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} = 0{,}960\,7522.$$

2. Определим норму кватерниона

$$N = \sqrt{A^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} = 1{,}386\,7389.$$

3. Вычислим нормированные компоненты кватерниона:

$a = 0{,}692\,8141$; $c = -0{,}044\,6426$;

$b = -0{,}339\,0941$; $d = -0{,}634\,8471$.

Контроль: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$.

4. Вычислим элементы матрицы Π по формулам (103):

$a_{11} = a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 0{,}189\,9524$; $a_{12} = 2(bc - ad) = 0{,}909\,9381$;

$a_{13} = 2(bd + ac) = 0{,}368\,6878$; $a_{21} = 2(bc + ad) = -0{,}849\,386$;

$a_{22} = a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = -0{,}036\,0313$; $a_{23} = 2(cd - ab) = 0{,}526\,5408$;

$a_{31} = 2(bd - ac) = 0{,}492\,4039$; $a_{32} = 2(cd + ab) = -0{,}413\,1759$;

$a_{33} = a^2 - b^2 - c^2 + d^2 = 0{,}766\,0444$.

Сравнив результаты этих вычислений с полученными значениями элементов a_{ik} матрицы Π (см. пример 2), убеждаемся в полном совпадении элементов матрицы Π, вычисленных двумя способами.

§ 6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ КООРДИНАТ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫМИ ИЗМЕНЕНИЯМИ ЭЙЛЕРОВЫХ УГЛОВ

Как известно из векторной алгебры, бесконечно малое приращение $d\bar{R}$ некоторого вектора в трехмерном пространстве можно выразить в виде векторного произведения

$$d\bar{R} = [\Delta\bar{\Psi} \times \bar{R}], \qquad (105)$$

где $\Delta\bar{\Psi}$ — вектор элементарного поворота, направленный по мгновенной оси вращения. В координатной форме векторному уравнению (105) соответствуют три уравнения:

$$\begin{aligned} dX &= Z\Delta\Psi_y - Y\Delta\Psi_z; \\ dY &= X\Delta\Psi_z - Z\Delta\Psi_x; \qquad (106) \\ dZ &= Y\Delta\Psi_x - X\Delta\Psi_y. \end{aligned}$$

Введем антисимметрическую матрицу A, осуществляющую элементарный поворот, для чего запишем эти уравнения в матричной форме. Получим

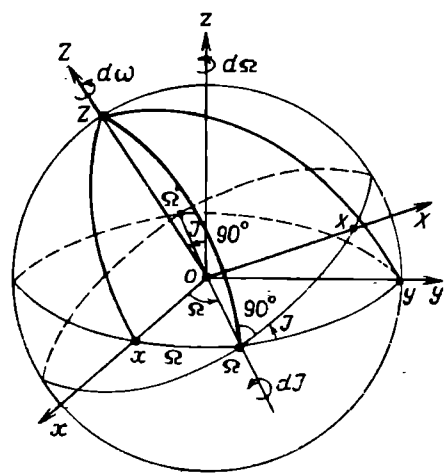

Рис. 8. Элементарные углы поворота dJ, $d\omega$, $d\Omega$

$$\begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & Z & -Y \\ -Z & 0 & X \\ Y & -X & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\Psi_x \\ \Delta\Psi_y \\ \Delta\Psi_z \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \Delta\Psi_x \\ \Delta\Psi_y \\ \Delta\Psi_z \end{bmatrix}. \tag{107}$$

Компоненты $\Delta\Psi_x$, $\Delta\Psi_y$, $\Delta\Psi_z$ выразим через элементарные приращения эйлеровых углов. Для этого выполним следующие элементарные повороты (рис. 8):

на угол $d\Omega$ вокруг оси oz;

на угол dJ вокруг положительного направления $o\Omega$ линии узлов $\Omega o\Omega'$;

на угол $d\omega$ вокруг оси oZ новой системы координат.

Тогда составляющие элементарных поворотов будут следующими:

$$\begin{aligned} d\Psi_x &= \cos(xoz)\,d\Omega + \cos(xo\Omega)\,dJ + \cos(xoZ)\,d\omega; \\ d\Psi_y &= \cos(yoz)\,d\Omega + \cos(yo\Omega)\,dJ + \cos(yoZ)\,d\omega; \\ d\Psi_z &= \cos(zoz)\,d\Omega + \cos(zo\Omega)\,dJ + \cos(zoZ)\,d\omega. \end{aligned} \tag{108}$$

Направляющие косинусы аппликаты oZ новой системы координат получим, решая сферические треугольники $xZ\Omega$ и ΩZy, которые имеют общую сторону $Z\Omega$, равную 90°:

$$\begin{aligned} \cos(xoZ) &= \sin J \sin\Omega; \\ \cos(yoZ) &= -\sin J \cos\Omega; \\ \cos(zoZ) &= \cos J. \end{aligned} \tag{109}$$

Матрица $\mathbf{Q}$, соответствующая преобразованиям (108), будет иметь вид

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & \cos\Omega & \sin J \sin\Omega \\ 0 & \sin\Omega & -\sin J \cos\Omega \\ 1 & 0 & \cos J \end{bmatrix}. \tag{110}$$

Поэтому

$$\begin{bmatrix} d\Psi_x \\ d\Psi_y \\ d\Psi_z \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} d\Omega \\ dJ \\ d\omega \end{bmatrix}, \tag{111}$$

откуда

$$\begin{aligned} d\Psi_x &= dJ \cos\Omega + d\omega \sin J \sin\Omega; \\ d\Psi_y &= dJ \sin\Omega - d\omega \sin J \cos\Omega; \\ d\Psi_z &= d\Omega + d\omega \cos J. \end{aligned} \tag{112}$$

Подставляя полученные выражения в формулы (107), получим

$$\begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & Z & -Y \\ -Z & 0 & X \\ Y & -X & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dI\cos\Omega + d\omega \sin I \sin\Omega \\ dI\sin\Omega - d\omega \sin I \cos\Omega \\ d\Omega + d\omega \cos I \end{bmatrix} \tag{113}$$

или

$$\begin{aligned} dX &= Z(\sin\Omega dI - \sin I\cos\Omega d\omega) - Y(d\Omega + d\omega\cos I); \\ dY &= -Z(\cos\Omega dI + \sin I\sin\Omega d\omega) + X(d\Omega + d\omega\cos I); \\ dZ &= Y(\cos\Omega dI + \sin I\sin\Omega d\omega) - X(dI\sin\Omega - d\omega\sin I\cos\Omega). \end{aligned} \tag{114}$$

Группируя слагаемые с $d\Omega$, $d\omega$ и dI, окончательно получим

$$\begin{aligned} dX &= -Yd\Omega - (Z\sin I\cos\Omega + Y\cos I)d\omega + Z\sin\Omega dI; \\ dY &= Xd\Omega - (Z\sin I\sin\Omega - X\cos I)d\omega - Z\cos\Omega dI; \\ dZ &= \sin I\,(Y\sin\Omega + X\cos\Omega)d\omega + (Y\cos\Omega - X\sin\Omega)dI. \end{aligned} \tag{115}$$

Следовательно, частные производные от координат X, Y, Z по эйлеровым углам будут следующими:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial X}{\partial\Omega} = -Y; \quad \frac{\partial X}{\partial\omega} = -(Z\sin I\cos\Omega + Y\cos I); \quad \frac{\partial X}{\partial I} = Z\sin\Omega; \\ &\frac{\partial Y}{\partial\Omega} = X; \quad \frac{\partial Y}{\partial\omega} = X\cos I - Z\sin\Omega\sin I; \quad \frac{\partial Y}{\partial I} = -Z\cos\Omega; \\ &\frac{\partial Z}{\partial\Omega} = 0; \quad \frac{\partial Z}{\partial\omega} = \sin I\,(X\cos\Omega + Y\sin\Omega); \quad \frac{\partial Z}{\partial I} = Y\cos\Omega - X\sin\Omega. \end{aligned} \tag{116}$$

Пример 5. В некоторый момент времени t координаты ИСЗ в геоцентрической системе координат были следующими:

$x=-4\,741\,632{,}0$ м; $y=-2\,376\,104{,}9$ м; $z=4\,206\,053{,}4$ м.

Эйлеровы углы, задающие ориентацию орбиты ИСЗ в геоцентрической системе координат, имели значения: $i=81{,}1°$; $\omega=32{,}0°$; $\Omega=2^h15^m=33{,}75°$.

При этом эйлеровы углы содержат малые приращения.

$$\delta i=\delta\omega=\delta\Omega=+0{,}01°=1{,}745\,3276\cdot10^{-4}.$$

Определить приращения в координатах ИСЗ, вызванные приращениями эйлеровых углов.

Решение.

1. По формулам (116) вычислим частные производные

$$\frac{\partial X}{\partial\Omega} = 2\,376\,104{,}9 \text{ м}; \quad \frac{\partial X}{\partial\omega} = -3\,087\,490{,}8 \text{ м}; \quad \frac{\partial X}{\partial I} = 2\,336\,758{,}1 \text{ м};$$

$$\frac{\partial Y}{\partial\Omega} = -4741\,632{,}0 \text{ м}; \quad \frac{\partial Y}{\partial\omega} = -3\,042\,203{,}0 \text{ м}; \quad \frac{\partial Y}{\partial I} = -3\,497\,205{,}7 \text{ м};$$

$$\frac{\partial Z}{\partial\Omega} = 0{,}0; \quad \frac{\partial Z}{\partial\omega} = -5\,199\,258{,}8 \text{ м}; \quad \frac{\partial Z}{\partial I} = 658\,650{,}5 \text{ м}.$$

2. Определим приращения координат:

$$dX = \frac{\partial X}{\partial \Omega}\delta\Omega + \frac{\partial X}{\partial \omega}\delta\omega + \frac{\partial X}{\partial J}\delta J = 283{,}7 \text{ м};$$

$$dY = \frac{\partial Y}{\partial \Omega}\delta\Omega + \frac{\partial Y}{\partial \omega}\delta\omega + \frac{\partial Y}{\partial J}\delta J = -1968{,}9 \text{ м};$$

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial \Omega}\delta\Omega + \frac{\partial Z}{\partial \omega}\delta\omega + \frac{\partial Z}{\partial J}\delta J = -792{,}5 \text{ м}.$$

Глава II
СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА И ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ КОСМИЧЕСКОЙ ФОТОГРАММЕТРИИ

§ 7. СИСТЕМА КООРДИНАТ СНИМКА

В верхней части корпуса метрической камеры расположена прикладная рамка, плоскость которой совмещена с задней фокальной плоскостью объектива. Во время экспонирования пленка прижимается к прикладной рамке. По периметру прикладной рамки имеются координатные метки *1*, *2*, *3*, *4*, которые определяют систему координат снимка $o'\tilde{x}\tilde{y}$ (рис. 9). Началом координат является точка o', в которой пересекаются взаимно перпендикулярные линии *1*—*2* и *3*—*4*, соединяющие противоположные метки. Перпендикуляр $f = co$, опущенный из задней узловой точки объектива c на плоскость прикладной рамки, называется фокусным расстоянием камеры, основанием этого перпендикуляра является главная точка снимка o. В идеально отъюстированной камере начало координат o' и главная точка снимка o совпадают. На практике эти точки не совпадают и отличаются на малую величину, которую, тем не менее, всегда необходимо учитывать.

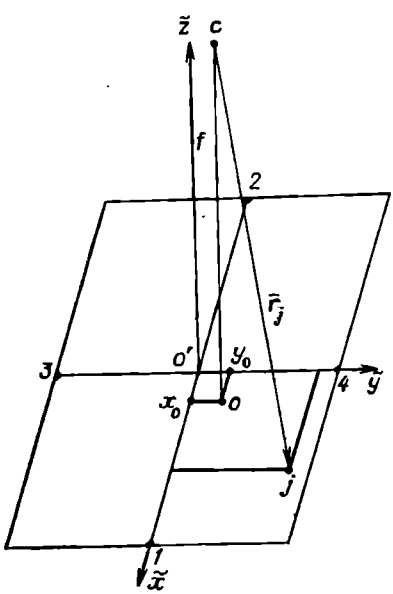

Рис. 9. Система координат снимка

Координаты главной точки x_0, y_0 и фокусное расстояние камеры являются элементами внутреннего

ориентирования снимка и определяют положение центра проектирования c.

Координаты главной точки $\tilde{x}_0$, $\tilde{y}_0$ и фокусное расстояние f камеры могут изменяться на малые величины. Эти изменения также необходимо учитывать при точных работах. Вектор $\bar{r}_j$ некоторой точки снимка j в пространстве изображения можно представить в следующем виде:

$$\bar{r}_j = \begin{pmatrix} \tilde{x}_j - \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_j - \tilde{y}_0 \\ \tilde{o} - \tilde{f} \end{pmatrix}. \tag{117}$$

Единичный вектор $\bar{r}_j^0$, определяющий направление в пространстве изображения, получим, нормируя вектор $\bar{r}_j$, т. е.

$$\bar{r}_j^0 = \frac{1}{\Delta_j} \begin{pmatrix} \tilde{x}_j - \tilde{x}_0 \\ \tilde{y}_j - \tilde{y}_0 \\ -\tilde{f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{l}_j \\ \tilde{m}_j \\ \tilde{n}_j \end{pmatrix}, \tag{118}$$

где Δ_j — нормирующий множитель,

$$\Delta_j = \sqrt{(\tilde{x}_j - \tilde{x}_0)^2 + (\tilde{y}_j - \tilde{y}_0)^2 + f^2}; \tag{119}$$

$$\tilde{l}_j^2 + \tilde{m}_j^2 + \tilde{n}_j^2 = 1. \tag{120}$$

Полагая, что начало координат перенесено в главную точку, вектор точки в пространстве изображения часто записывают в виде

$$\bar{r}_j = \begin{pmatrix} \tilde{x}_j \\ \tilde{y}_j \\ -\tilde{f} \end{pmatrix}. \tag{121}$$

В дальнейшем, при рассмотрении только координат точек снимка, тильду (~) над буквой будем опускать.

Идеальный снимок должен представлять собой центральную проекцию пространства объекта, однако реальный снимок содержит целый ряд искажений, которые необходимо исключить или сделать пренебрегаемо малыми.

Дисторсия. Нарушение центральной проекции вызвано наличием дисторсии объектива съемочной камеры. По характеру смещений изображения точек дисторсия делится на радиальную и тангенциальную. Радиальная дисторсия зависит от расчета объектива,

технологии его изготовления и от условий эксплуатации камеры.

Если линзы объектива центрированы идеально, то следует учитывать лишь радиальную дисторсию, которую можно представить в виде ряда разложения по нечетным степеням расстояния от главной точки

$$\delta r = K_1 r^3 + K_2 r^5 + K_3 r^7 + \ldots, \tag{122}$$

где K_1, K_2, K_3 — коэффициенты радиальной дисторсии;

$$r = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{1/2}; \tag{123}$$

x, y — координаты некоторой точки снимка; x_0, y_0 — координаты главной точки снимка.

Однако добиться идеальной центрировки линз очень трудно. Поэтому всегда имеет место дисторсия, обусловленная децентрацией линз, при которой центры кривизны оптических поверхностей линз объектива не лежат на одной прямой. Дисторсию децентрации можно представить в виде радиальной и тангенциальной составляющих:

$$\delta_r = 3(J_1 r^2 + J_2 r^4 + \ldots) \sin(\Phi - \Phi_0);$$

$$\delta_t = (J_1 r^2 + J_2 r^4 + \ldots) \cos(\Phi - \Phi_0), \tag{124}$$

δ_r — радиальная составляющая дисторсии децентрации; δ_t — тангенциальная составляющая дисторсии децентрации; J_1, J_2 — коэффициенты дисторсии децентрации.

Величина Φ_0 — угол между положительным направлением оси снимка и направлением на заданную точку снимка, т. е.

$$\Phi_0 = \arcsin \frac{(x - x_0)}{r} = \arccos \frac{(y - y_0)}{r}. \tag{125}$$

Если элементы внутренней ориентации снимка x_0, y_0, f, параметры радиальной дисторсии (K_1, K_2, K_3, ...) и параметры дисторсии децентрации (Φ_0, J_1, J_2, ...) определены, то поправки за совместное влияние радиальной дисторсии и дисторсии децентрации можно определить по формулам, предложенным Д. Брауном:

$$\Delta x = \bar{x}(K_1 r^2 + K_2 r^4 + \ldots) + [P_1(r^2 + 2\bar{x}^2) + 2P_2 \bar{x}\bar{y}][1 + P_3 r^2 + \ldots];$$

$$\Delta y = \bar{y}(K_1 r^2 + K_2 r^4 + \ldots) + [2P_1 \bar{x}\bar{y} + P_2(r^2 + 2\bar{y})][1 + P_3 r^2 + \ldots], \tag{126}$$

где Δx, Δy — поправки в измеренные на снимке координаты точки за совместное влияние радиальной дисторсии и дисторсии децентрации; $\bar{x} = x - x_0$, $\bar{y} = y - y_0$ — координаты, отнесенные к главной точке снимка. Величины P_1, P_2, P_3, входящие в выражения (126), являются функциями параметров дисторсии децентрации:

$$P_1 = J_1 \sin \Phi_0; \quad P_2 = J_2 \cos \Phi_0; \quad P_3 = J_2 / J_1. \tag{127}$$

Обратные соотношения имеют вид:

$$\Phi_0=\operatorname{arctg}(P_1/P_2);\ J_1=(P_1^2+P_2^2)^{1/2};\ J_2=(P_1^2+P_2^2)^{1/2}P_3. \quad (128)$$

Процесс калибровки камеры заключается в совместном определении параметров радиальной дисторсии, дисторсии децентрации и элементов внутреннего ориентирования.

В космической фотограмметрии калибровка камер выполняется, как правило, путем фотографирования звездного неба, так как звезды представляют собой точечные источники света, весьма точно определенные из астрономических наблюдений, и являются идеальными объектами для калибровки.

Деформация светочувствительных материалов. Фотопленка за время, прошедшее от экспозиции до измерений на компараторе, деформируется. Деформация может быть равномерной, неравномерной, местной, наблюдается также миграция фотослоя. Способы учета деформации пленки зависят от конструкции аэрофотоаппарата и его юстировки.

В космической фотограмметрии для определения деформации пленки используют выравнивающее стекло с сеткой крестов, которое помещают в фокальной плоскости камеры. Калиброванные координаты крестов относят к главной точке снимка и исправляют за дисторсию объектива.

Для определения деформации пленки измеряют все кресты сетки. Разности между калиброванными и измеренными координатами крестов используют для определения коэффициентов полиномов, по которым вычисляют поправки в измеренные координаты точек космического снимка как функции положения точек на аэроснимке:

$$x'=x+a_0+a_1x+a_2x^2+a_3y+a_4y^2+a_5xy+a_6x^2y+\ \ldots; \quad (129)$$

$$y'=y+b_0+b_1x+b_2x^2+b_3y+b_4y^2+b_5xy+b_6x^2y+\ \ldots.$$

Могут быть использованы и другие типы полиномов, например, осуществляющие конформное преобразование.

Несовпадение фотопленки с плоскостью прикладной рамки. Снимок содержит искажения, вызванные несовпадением фотопленки с плоскостью прикладной рамки. Строго говоря, в момент экспонирования пленка не является плоскостью, а представляет собой сложную поверхность, которая получается при огибании неровностей прижимного стола, мелких частиц, находящихся между прижимным столом и пленкой, и т. д.

Искажения координат точек снимка, вызванные несовпадением фотопленки с плоскостью прикладной рамки, можно вычислить по формулам

$$\Delta x=\frac{x\Delta f}{f}-1{,}22\frac{\Delta^2 f}{L};\quad \Delta y=\frac{y\Delta f}{f}-1{,}22\frac{\Delta^2 f}{L}. \quad (130)$$

В этих формулах Δf — величина стрелки прогиба пленки, которая, вообще говоря, неизвестна, а величина L определяется по формуле Е. П. Аржанова

$$L = \sqrt[4]{\frac{96\Delta f E \delta^3}{P}}, \tag{131}$$

где E — модуль упругости (модуль Юнга); δ — толщина пленки; P — интенсивность распределительной нагрузки. Поскольку на практике все величины, входящие в формулы (130), неизвестны, то можно говорить только о средних или максимальных искажениях, вносимых несовпадением пленки с плоскостью прикладной рамки.

По исследованиям Н. А. Соколовой, максимальные искажения в абсциссах точек, вызванные этим фактором, могут достигать 14 мкм при $f = 100$ мм.

Рефракция световых лучей. Она также вызывает искажения координат точек снимков. При учете рефракции различают внешнюю, а также рефракцию, возникающую внутри съемочного отсека, в котором установлены камеры.

Внешнюю атмосферную рефракцию можно выразить в виде

$$\Psi = K \operatorname{tg} \beta, \tag{132}$$

где Ψ — угол рефракции; β — угол между направлением луча света и направлением на точку надира.

Для вычисления коэффициента K предложен ряд формул, из которых наиболее удобна для вычислений формула Бертрама:

$$K = \left[\frac{2410H}{H^2 - 6H + 250} - \frac{2410h}{h^2 - 6h + 250}\left(\frac{h}{H}\right)\right] 10^{-6}; \tag{133}$$

где H — высота полета в километрах; h — средняя высота местности над уровнем моря в километрах.

Как известно, действие рефракции заключается в радиальном смещении точек снимка от точки надира (положение точки надира до определения элементов внешнего ориентирования неизвестно).

При космическом фотографировании оптическая ось топографической камеры отслеживает центр масс Земли с ошибками не более 2—3°. В этих условиях топографический снимок можно считать плановым.

Для плановых снимков точка надира совпадает с главной точкой снимка. Поправка за рефракцию Δr для случая планового снимка при любом радиальном расстоянии r имеет вид

$$\Delta r = K\left(r + \frac{r^3}{f^2}\right) \tag{134}$$

или

$$\Delta r = K\left(\frac{f^2 + r^2}{f}\right)\psi. \qquad (135)$$

Поправка за атмосферную рефракцию при съемках Земли с ИСЗ невелика. Пусть, например, камера имеет фокусное расстояние f=200 мм, радиальное расстояние от главной точки снимка до изображения объекта r=70 мм. Высота круговой орбиты H= =250 км, средняя высота местности над уровнем моря h=0,25 км, угол между лучом и точкой надира β=70°.

Тогда коэффициент K, определенный по формуле (132), будет $K=9{,}84\cdot10^{-6}$, а поправка за рефракцию Δr, полученная по формуле (134), $\Delta r=7{,}73\cdot10^{-4}$ мм. Звездные снимки практически не искажены атмосферной рефракцией.

Существенные искажения возникают вследствие деформаций иллюминатора и внутренней рефракции. Существуют специальные методики учета этих искажений.

Одним из способов устранения деформаций иллюминатора и внутренней рефракции является изготовление не плоскопараллельного иллюминатора, а имеющего некоторую кривизну, радиус которой можно рассчитать.

§ 8. ИНЕРЦИАЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

В космической фотограмметрии объектом измерений являются снимки, полученные с борта КА, который обращается вокруг планеты под действием гравитационных и других сил. Ориентация топографических снимков в пространстве выполняется при помощи звездной камеры путем фотографирования звездного неба. Таким образом, в космической фотограмметрии необходимо учитывать орбитальное движение космического аппарата и, следовательно, использовать системы координат, в которых можно адекватно описать орбитальное движение. Основным требованием, предъявляемым к системам отсчета (координаты и время), в которых рассматривается движение КА, является требование инерциальности. Любая система отсчета в которой свободная материальная точка движется рав-

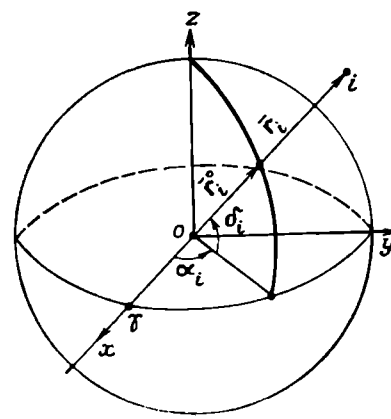

Рис. 10. Экваториальная (инерциальная) система координат

номерно и прямолинейно, называется инерциальной или галилеевой. В такой системе в силу самого определения должен выполняться первый закон Ньютона.

В качестве инерциальной системы координат при изучении движения ИСЗ используют экваториальную геоцентрическую систему координат (рис. 10), начало которой o находится в центре масс Земли, ось ox направлена в точку весеннего равноденствия γ, ось oz совпадает с осью вращения Земли и положительна в направлении к северному полюсу, а ось oy дополняет систему от триэдра правой ориентации.

Экваториальная система координат непрерывно медленно изменяется сложным образом вследствие прецессии и нутации и поэтому, строго говоря, не является инерциальной. Для того чтобы экваториальная система стала инерциальной, ее необходимо зафиксировать относительно некоторой эпохи T_0. В космических исследованиях в качестве стандартной эпохи принимается эпоха T_0=1950,0 или T_0=2000,0.

Положение точки i пространства в инерциальной системе координат задается ее геоцентрическим радиусом-вектором r_i, прямым восхождением α_i и склонением δ_i.

Прямое восхождение α_i отсчитывается в плоскости экватора против часовой стрелки от точки весеннего равноденствия до проекции радиуса-вектора и обычно задается в часовой мере, склонение δ_i представляет собой угол между геоцентрическим радиусом-вектором и плоскостью экватора.

Таким образом, инерциальные геоцентрические координаты x, y, z задаются формулами

$$x=r\cos\alpha\cos\delta;\quad y=r\sin\alpha\cos\delta;\quad z=r\sin\delta, \tag{136}$$

а обратное преобразование —

$$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\ (0\leqslant\alpha\leqslant 24^h);$$

$$\delta=\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\ (-90^\circ\leqslant\delta\leqslant 90^\circ); \tag{137}$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Инерциальная система координат устанавливается каталогами координат звезд.

Каталог FK-4 содержит координаты α и δ 1535 звезд, а также собственные движения звезд μ_α и μ_δ по этим координатам. Вывод системы положений звезд каталога FK-4 основан на наиболее точных астрономических наблюдениях XX столетия, а для вывода собственных движений звезд использован ряд каталогов, полученных в обсерваториях, ведущих регулярные наблюдения с середины прошлого века.

Случайные ошибки каталога FK-4 характеризуются следующими средними квадратическими ошибками:

$m(\alpha \cos \delta) = \pm 0{,}001^s \div 0{,}002^s$;

$100m(\mu_\alpha \cos \delta) = \pm 0{,}005^s \div 0{,}012^s$;

$m(\delta) = \pm 0{,}02'' \div 0{,}03''$;

$100m(\mu_\delta) = \pm 0{,}10'' \div 0{,}15''$.

Южные звезды определены с несколько меньшей точностью.

Каталог FK-4 принят в качестве международной основы для Астрономического ежегодника СССР (АЕ) с 1964 г.

В космической фотограмметрии используются также и каталоги, которые содержат большее число звезд, при этом их координаты определены с меньшей точностью. Наиболее широко используется каталог Смитсонианской астрофизической обсерватории (SAOC), который содержит координаты и собственные движения 258 997 звезд. Все положения звезд в каталоге SAOC редуцированы к системе FK-4, однако ошибки в координатах отдельных звезд могут превышать одну секунду дуги.

В настоящее время осуществляется переход на новый фундаментальный каталог FK-5, в который входит уже 3500 звезд, что важно для практических приложений.

В каталогах координаты звезд задаются в средней экваториальной системе координат $ox_0y_0z_0$, отнесенной к эпохе каталога T_0. Ось ox_0 этой системы направлена в среднюю точку весеннего равноденствия γ_0 на эпоху каталога T_0.

Чтобы перейти от средних координат α_0 и δ_0 звезды, заданных на эпоху каталога T_0, к истинным координатам α и δ, отнесенным к моменту фотографирования t_i, необходимо учесть собственное движение звезды за промежуток времени $t_i - T_0$, прецессию за этот же промежуток и нутацию. Таким образом, вычисления истинных координат на момент фотографирования t_i производят в следующей последовательности:

1. Исправляют координаты звезды за собственное движение:

$$\alpha'_0 = \alpha_0 + \mu_\alpha (t_i - T_0);$$
$$\delta'_0 = \delta_0 + \mu_\delta (t_i - T_0). \qquad (138)$$

2. Вычисляют компоненты единичного вектора $\bar{r}'_0$ направления на звезду в средней системе координат эпохи T_0, исправленные за собственные движения звезды:

$$\bar{r}_0' = \begin{pmatrix} \cos\alpha_0' \cos\delta_0' \\ \sin\alpha_0' \cos\delta_0' \\ \sin\delta_0' \end{pmatrix}. \qquad (139)$$

3. Пусть Π_{pr} — ортогональная матрица, учитывающая действие прецессии за промежуток времени $(t_i—T_0)$. Умножив эту матрицу на вектор $\bar{r}'_0$, учитывают поворот системы координат, обусловленный действием прецессии:

$$\bar{r}_0'' = \Pi_{pr}\bar{r}_0'. \tag{140}$$

При этом ось *ox* будет направлена в среднюю точку весеннего равноденствия в момент фотографирования.

4. Учитывают нутацию, для чего на вектор $\bar{r}''_0$ действуют ортогональной матрицей нутации Π_{nut}:

$$\bar{r}_0 = \Pi_{nut}\bar{r}_0'' = \Pi_{nut}\Pi_{pr}\bar{r}_0'. \tag{141}$$

В результате этого преобразования ось *ox* будет направлена в истинную точку весеннего равноденствия на эпоху фотографирования. Поскольку нутационные эффекты не превосходят 10^{-4}, при учете нутации можно ограничиться только линейными членами в разложении элементов матрицы нутации в ряды Тейлора.

§ 9. ГРИНВИЧСКАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Земля в инерциальной системе координат вращается, совершая оборот за одни звездные сутки, длительность которых составляет $23^h\,56^m\,04{,}09^s$ в единицах всемирного времени (среднего солнечного времени). Для задания положений точек поверхности Земли инерциальная система координат неудобна, так как помимо трех координат точки необходимо указывать и момент времени, в который точка имеет заданные координаты. В космических исследованиях, геофизике и геодезии вводят геоцентрическую систему координат, жестко связанную с Землей и участвующую в ее суточном вращении.

Известно, что полюса Земли вследствие перераспределения масс в ее теле и других эффектов непрерывно меняют свое положение на поверхности Земли. Перемещения полюсов невелики: Северный полюс Земли описывает на ее поверхности сложную кривую, которая не выходит из квадрата со сторонами около 20 м. Тем не менее при современной точности наблюдений неучет движения полюсов вносит неопределенность в заданные системы координат, жестко связанные с Землей. Для исключения неопределенности вводится Международное условное начало (МУН), за которое принимается точка, соответствующая среднему положению Северного полюса Земли за период 1900—1905 гг.

В качестве жестко связанной с Землей геоцентрической системы координат в космических исследованиях используют гринвичскую геоцентрическую систему координат *oXYZ* (рис. 11), начало которой, так же как и инерциальной, совпадает с центром масс Земли,

ось oZ направлена в средний Северный полюс Земли 1900—1905 гг, а ось oX лежит в плоскости экватора 1900—1905 гг. и направлена в точку пересечения экватора и геоцентрического меридиана Гринвича этой эпохи.

Переход от истинных инерциальных координат α и δ на эпоху фотографирования t_i к гринвичским координатам выполняют в два этапа.

Пусть в результате редукционных вычислений, выполненых в соответствии с правилами (138)—(141), получен единичный вектор $\mathbf{r}_0$, отнесенный к истинной системе координат эпохи фотографирования t_i. На первом этапе система инерциальных истинных координат поворачивается вокруг оси oZ на угол, численно равный истиному звездному времени S в Гринвиче, после чего ось oX совпадет с мгновенным меридианом Гринвича:

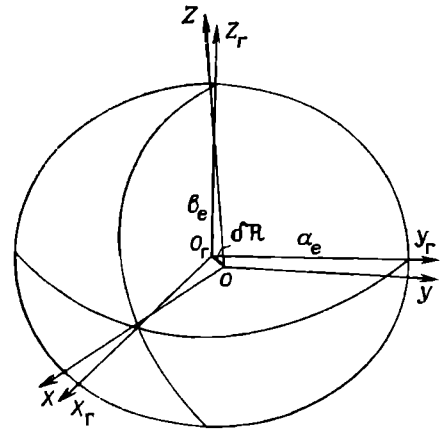

Рис. 11. Гринвичская ($oXYZ$) и геодезическая ($oX_гY_гZ_г$) системы координат

$$\bar{R}^{0\prime}=S\bar{r}^{0}. \tag{142}$$

В данном преобразовании S — ортогональная матрица вращения, соответствующая повороту на угол S, численно равный звездному времени в Гринвиче, т. е.

$$S=\begin{bmatrix} \cos S & \sin S & 0 \\ -\sin S & \cos S & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{143}$$

где S — истинное звездное время в момент фотографирования, которое определяется из выражения

$$S=S_0+t_i+9{,}856\ s/ht_i^h=S_0+t_i+1{,}002\,7378t_i^{(h)}, \tag{144}$$

где S_0 — истинное звездное время в 0^h всемирного времени, значения S_0 для каждых суток публикуются в разделе «Звездное время» (AE); t_i — всемирное время в момент фотографирования.

На втором этапе перехода ось oZ должна быть направлена в средний полюс эпохи 1900—1905 гг. Для этого необходимо располагать истинными координатами полюса δx_p и δy_p на эпоху фотографирования t относительно среднего полюса 1900—1905 гг. Начиная с 1963 г., предварительные значения координат истинного полюса мира, полученные по наблюдениям пяти обсерваторий, объ-

единенных в Международную службу движения полюсов (МСДП), публикуются в специальном издании «Monthly Notes of the International Polar Motion Service» на 1,5—2 месяца с опозданием в три месяца, а окончательные значения указываются в годовом отчете «Annual Report of the JPMS» с интервалом в 0,05 года (18 суток).

Располагая координатами истинного полюса δx_p и δy_p, перейдем к определению направления в гринвичской системе координат. Будем иметь

$$\bar{R}^0 = \mathbf{P}\mathbf{S}\bar{r}^0, \tag{145}$$

где $\mathbf{P}$ — матрица, описывающая движение полюса,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta x_p \\ 0 & 1 & -\delta y_p \\ -\delta x_p & \delta y_p & 1 \end{bmatrix}. \tag{146}$$

Координаты полюса в матрице (146) должны быть выражены в радианах. При вычислениях также используют матрицу $\mathbf{PS}$:

$$\mathbf{PS} = \begin{bmatrix} \cos S & \sin S & \delta x_p \\ -\sin S & \cos S & -\delta y_p \\ -\delta x_p \cos S - \delta y_p \sin S & -\delta x_p \sin S + \delta y_p \cos S & 1 \end{bmatrix}. \tag{147}$$

Следовательно, переход от направления на звезду, заданного в средней инерциальной системе координат на эпоху каталога T_0, к гринвичской системе координат выполняют на основании соотношения

$$\bar{R}^0 = \mathbf{PS}\Pi_{nut}\Pi_{p_r}\bar{r}^{0\prime}. \tag{148}$$

§ 10. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

В геодезии и фотограмметрии наиболее широкое применение получили геодезические системы координат, заданные относительно референц-эллипсоидов. Международный астрономический союз (МАС) в 1976 г. рекомендовал использовать общий земной эллипсоид с большой полуосью a_e=6 378 140 м и сжатием α_e=1/298,257.

Геодезическую систему координат задают широтой B_0, долготой L_0 и высотой H_0 исходного пункта и параметрами референц-эллипсоида a_e и α_e.

Начало геодезической системы координат $o_г$ (см. рис. 11), как правило, не совпадает с центром масс Земли, однако всякая геодезическая система практически параллельна гринвичской системе координат. Для ориентирования геодезических систем используют результаты высокоточных астрономических наблюдений, поэтому и углы между осями геодезической прямоугольной системы коор-

динат $o_\text{г}X_\text{г}Y_\text{г}Z_\text{г}$ и соответствующими осями гринвичской системы $oXYZ$ порядка ошибок астрономических определений и не превосходят 1—2″. Поэтому в дальнейшем будем полагать, что оси гринвичской и геодезической систем координат параллельны и имеется только сдвиг $\delta\bar{\mathbf{R}}$ начала координат геодезической системы координат. Геодезические координаты задают в форме прямоугольных координат $X_\text{г}$, $Y_\text{г}$, $Z_\text{г}$ или в форме криволинейных координат B, L, H (геодезическая широта, геодезическая долгота и высота, отсчитываемая вдоль нормали N к поверхности эллипсоида). Ось $o_\text{г}X_\text{г}$ направлена в точку пересечения геодезического меридиана Гринвича с плоскостью экватора, а ось $o_\text{г}Z_\text{г}$ совпадает с осью вращения эллипсоида. Ось $o_\text{г}Y_\text{г}$ дополняет систему до триэдра правой ориентации и положительна к востоку.

Связь прямоугольных и криволинейных геодезических координат можно установить с помощью известных из высшей геодезии формул:

$$\begin{aligned} X_\text{г} &= (N+H)\cos B\cos L;\\ Y_\text{г} &= (N+H)\cos B\sin L;\\ Z_\text{г} &= [N(1-e^2)+H]\sin B, \end{aligned} \tag{149}$$

где N—нормаль к поверхности эллипсоида, причем $N=a_e/(1-e^2\times\times\sin^2 B)^{1/2}$; e — эксцентриситет эллипсоида.

Обратный переход от прямоугольных координат к криволинейным сложнее, поскольку требует последовательных приближений при вычислении широты.

Широту методом последовательных приближений вычисляют по формуле

$$\operatorname{tg} B^{(k+1)} = \frac{Z_\text{г}+N^{(k)}e^2\sin B^{(k)}}{\sqrt{X_\text{г}^2+Y_\text{г}^2}}, \tag{150}$$

где k — номер приближения. В качестве начального приближения можно использовать соответствующее выражение для сферы:

$$\operatorname{tg} B^{(0)} = \frac{Z_\text{г}}{\sqrt{X_\text{г}^2+Y_\text{г}^2}}. \tag{151}$$

Процесс приближений быстро сходится. Для таких вычислений английским геодезистом Боурингом был предложен алгоритм расчета, который обеспечивает необходимую точность без приближений.

По алгоритму Боуринга сначала вычисляют вспомогательный угол θ:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{Z_\text{г}}{\sqrt{X_\text{г}^2+Y_\text{г}^2}}\,\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}, \tag{152}$$

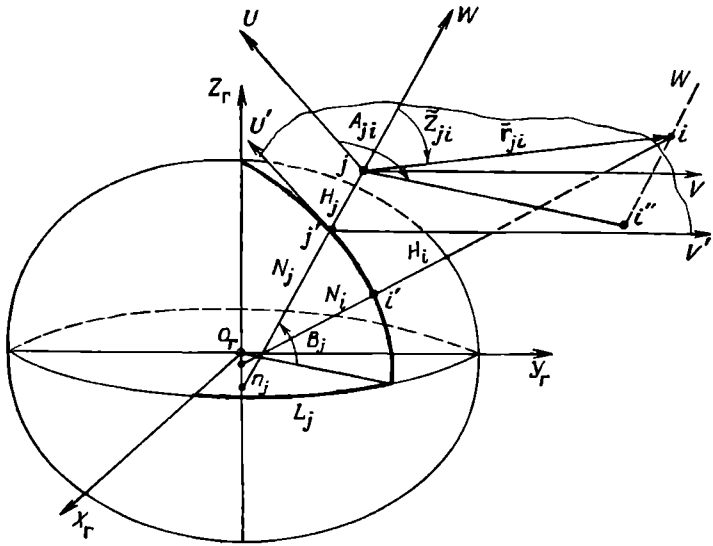

Рис. 12. Геодезические и горизонтные геодезические координаты

затем широту B определяют по формуле

$$\operatorname{tg} B = \frac{Z_г + e' e a_e \sin^3 \theta}{\sqrt{X_г^2 + Y_г^2 - e^2 a_e \cos^3 \theta}} = \frac{Z_г + p \sin^3 \theta}{\sqrt{X_г^2 + Y_г^2 - q \cos \theta}}. \qquad (153)$$

В формуле (153) e' — второй эксцентриситет эллипсоида, связанный с эксцентриситетом e соотношением

$$e' = \sqrt{\frac{e^2}{1 - e^2}}. \qquad (154)$$

Ошибка $\delta B''$ вычисления широты по алгоритму Боуринга достигает максимума при $H = 2a_e$, но даже в этом случае $\delta B'' \leqslant 0{,}0017''$.

Геодезическую долготу L определяют по формуле

$$\operatorname{tg} L = \frac{Y_г}{X_г}, \qquad (155)$$

а высоту H — на основании равенств

$$H = \frac{X_г}{\cos B \cos L} - N = \frac{Y_г}{\cos B \sin L} - N = \frac{Z_г}{\sin B} - N(1 - e^2). \qquad (156)$$

На практике часто используется топоцентрическая горизонтная система геодезических координат UVW (рис. 12). Начало координат j этой системы находится в произвольной точке пространства с геодезическими координатами B_j, L_j, H_j. Полярными координатами некоторой точки i в этой системе являются геодезический

азимут A_{ji}, геодезическое зенитное расстояние Z_{ji} и прямолинейное расстояние $|\bar{r}_{ji}|$.

Ось W является продолжением нормали N_j к поверхности эллипсоида в точке j, ось U расположена в плоскости меридиана точки j, перпендикулярно к оси W и положительна в направлении к оси вращения эллипсоида, ось V перпендикулярна к осям U и W.

Полярные координаты точки: i — геодезический азимут; A_{ji} — двугранный угол между плоскостью меридиана начальной точки j и нормальной плоскостью jii'', проходящей через нормаль в точке i'' и через точку i; геодезическое зенитное расстояние $\bar{Z}_{ji}$ — угол между осью W и вектором $\bar{r}_{ji}$.

Связь прямоугольных координат U, V, W и полярных координат $\bar{r}$, A, $\bar{Z}$ задается следующей системой формул:

$$\begin{aligned} U_i &= r_{ji} \sin \bar{Z}_{ji} \cos A_{ji}; \\ V_i &= r_{ji} \sin \bar{Z}_{ij} \sin A_{ji}; \\ W_i &= r_{ji} \cos \bar{Z}_{ji}; \end{aligned} \tag{157}$$

$$\operatorname{ctg} Z_{ji} = \frac{W_i}{\sqrt{U_i^2 + V_i^2}} = \frac{W_j}{U_j \cos A_{ji} + V_j \sin A_{ji}}; \tag{157}$$

$$\operatorname{tg} A_{ji} = \frac{V_i}{U_i}; \tag{158}$$

$$|\bar{r}_{ji}| = \sqrt{U_i^2 + V_i^2 + W_i^2} = (U_i \cos A_{ji} + V_i \sin A_{ji} \sin Z_{ji} + W_i \cos Z_{ji}$$

Переход от горизонтных прямоугольных координат U, V, W к прямоугольным геодезическим координатам $X_г$, $Y_г$, $Z_г$ выполняется в следующей последовательности:

перенесем начало координат горизонтной системы в точку n_j пересечения нормали N_j и оси вращения эллипсоида, в результате чего координата W увеличивается на величину $N_j + H_j$;

повернем оси координат U и V вокруг оси W на угол $90° - B_j$, при этом ось W совпадает с осью вращения эллипсоида;

перенесем теперь начало координат n_j в центр эллипсоида, для чего уменьшим аппликату на величину $on_j = N_j e^2 \sin^2 B_j$;

повернем оси координат, лежащие в плоскости экватора, вокруг оси oZ на угол, равной долготе L_j точки j, и изменим знак абсциссы на противоположный.

В результате преобразований будем иметь:

$$\begin{aligned} X_{гi} &= [(W_i + N_j + H_j) \cos B_j - U_i \sin B_j] \cos L_j - V_i \sin L_j; \\ Y_{гi} &= [(W_i + N_j + H_j) \cos B_j - U_i \sin B_j] \sin L_j + V_i \cos L_j; \\ Z_{гi} &= (W_i + N_j + H_j) \sin B_j + U_i \cos B_j - N_j \tilde{e}^2 \sin B_j. \end{aligned} \tag{159}$$

Формулы обратного перехода получим, решив эти уравнения относительно U_i, V_i и W_i, т. е.:

$$U_i=(Z_{ri}+N_j e^2 \sin B_i)\cos B_j-(X_{ri}\cos L_j+Y_{ri}\sin L_j)\sin B_j;$$
$$V_i=Y_{ri}\cos L_j-X_{ri}\sin L_j; \qquad (160)$$
$$W_i=(Z_{ri}+N_j e^2 \sin B_j)\sin B_j+(X_{ri}\cos L_i+$$
$$+Y_{ri}\sin L_j)\cos B_j-(N_j+H_j).$$

Пример 6.

На станции наблюдений ИСЗ в результате фотографических и доплеровских наблюдений определены истинные инерциальные координаты ИСЗ в момент t_i: $x=-4\,741\,632{,}0$ м; $y=-2\,376\,104{,}9$ м; $z=4\,206\,053{,}4$ м.

Истинное звездное время S_0 в гринвичскую полночь даты наблюдений по данным АЕ $S_0=2^h{,}296\,7239$. Всемирное время UT1, соответствующее моменту t_i, равно UT1 $(t_i)=0{,}628\,3683^h$, координаты мгновенного полюса относительно МУН: $\delta x_p=-0{,}06''$; $\delta y_p=0{,}23''$ или $\delta x_p=-2{,}9\cdot10^{-7}$; $\delta y_p=1{,}11\cdot10^{-6}$.

Требуется вычислить геодезические координаты ИСЗ в момент t_i в системе координат эллипсоида МАС (1976) с параметрами: большая полуось $a_e=6\,378\,140$ м; квадрат эксцентриситета $e^2=6{,}694\,385\cdot10^{-3}$; квадрат второго эксцентриситета $e'^2=6{,}739\,5018\cdot10^{-3}$; $p=aee'=4{,}284\,1352\cdot10^4$; $q=ae^2=4{,}269\,7725\cdot10^4$.

Решение.

1. По формуле (144) вычислим истинное звездное время в Гринвиче S_i в момент t_i, получим

$$S_i=S_0+t_i+1{,}002\,7378t_i=2{,}926\,8125^h.$$

Составим матрицу **S** в соответствии с формулой (143):

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix}\cos S & \sin S & 0\\ -\sin S & \cos S & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7{,}205\,2467\cdot10^{-1} & 6{,}934\,2934\cdot10^{-1} & 0\\ -6{,}934\,2934\cdot10^{-1} & 7{,}205\,2467\cdot10^{-1} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

3. Составим матрицу **P** движения полюсов

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \delta x_p\\ 0 & 1 & -\delta y_p\\ -\delta x_p & \delta y_p & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2{,}9\cdot10^{-7}\\ 0 & 1 & -1{,}11\cdot10^{-6}\\ 2{,}9\cdot10^{-7} & 1{,}11\cdot10^{-6} & 1\end{bmatrix}.$$

4. Вычислим матрицу **PS**

$$\mathbf{PS}=\begin{bmatrix}7{,}205\,2467\cdot10^{-1} & 6{,}934\,2934\cdot10^{-1} & -2{,}9\cdot10^{-7}\\ -6{,}934\,2934\cdot10^{-1} & 7{,}205\,2467\cdot10^{-1} & -1{,}11\cdot10^{-6}\\ -5{,}61\cdot10^{-7} & 1{,}00\cdot10^{-6} & 1\end{bmatrix}.$$

5. Определим гринвичские координаты ИСЗ X, Y, Z

$$\begin{bmatrix}X\\ Y\\ Z\end{bmatrix}=\mathbf{PS}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\,064\,124{,}9\\ 1\,575\,939{,}8\\ 4\,206\,053{,}7\end{bmatrix}.$$

Если полагать матрицу **P** движения полюсов единичной, то гринвичские координаты в данном примере будут следующими: $X'=-5\,064\,123{,}7$; $Y'=1\,575\,944{,}5$; $Z'=4\,206\,053{,}4$, т. е. погрешности, обусловленные движением полюса, составят: $|\delta X|=1{,}2$ м; $|\delta Y|=4{,}7$ м; $|\delta Z|=0{,}3$ м.

6. Поскольку информация об ориентации системы координат эллипсоида МАС относительно гринвичской системы отсутствует, то полагаем, что $X=X_г$, $Y=Y_г$, $Z=Z_г$.

7. Найдем по формуле Боуринга геодезическую широту B:

$$B = \operatorname{arctg} \frac{Z_г + p \sin^3 \theta}{\sqrt{X_г^2 + Y_г^2} - q \cos^3 \theta} = 38{,}592\,45°.$$

8. Определим геодезическую долготу L:

$$L = \operatorname{arctg} \frac{Y}{X} = 162{,}714\,02°.$$

9. Найдем высоту H, отсчитанную по нормали к эллипсоиду МАС,

$$H = \frac{X}{\cos B \cos L} - N = 399\,174{,}8 \text{ м}.$$

10. Значения вспомогательных величин будут следующими:

$\theta = 38{,}509\,734°$;

$N = 6\,386\,462{,}8$ м;

$q = 42\,697{,}725$ м
$p = 42\,841{,}352$ м
$e^2 = 6{,}694\,385 \cdot 10^{-3}$
$a/b = 1{,}003\,364\,1$
} параметры эллипсоида МАС.

§ 11. ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ КОСМИЧЕСКОЙ ФОТОГРАММЕТРИИ

Методы построения сетей космической фототриангуляции, привязка отдельных точек снимков и определение орбит по фотограмметрической информации основаны на использовании фундаментального уравнения космической фотограмметрии.

Рассмотрим рис. 13:

$o\,x\,y\,z$ — геоцентрическая инерциальная система координат;

$o\,X\,Y\,Z$ — гринвичская геоцентрическая система координат, которая вращается вместе с Землей вокруг оси $o\,Z$, делая один оборот за одни звездные сутки;

S_i — звездное время в Гринвиче, численно равное углу между осями ox и oX инерциальной и гринвичской систем координат в момент t_i;

$\Omega\Pi_i$ — элемент орбитального эллипса, i — положение ИСЗ на орбите в момент фотографирования t_i;

$o\Omega$ — положительное направление линии узлов, по которой пересекаются плоскость орбиты и плоскость земного экватора;

точка Ω — восходящий узел орбиты, который является точкой пересечения экватора и орбиты при движении ИСЗ из южного полушария в северное (отмечено стрелкой на орбите);

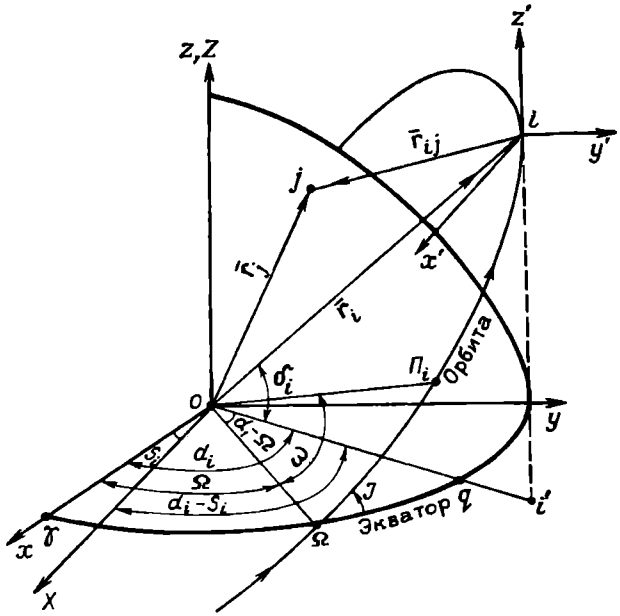

Рис. 13. Орбита ИСЗ в гринвичской геоцентрической системе координат

ii' — перпендикуляр, опущенный из мгновенного положения ИСЗ на плоскость экватора;

$\bar{r}_i=(x_i\ y_i\ z_i)^T$ — геоцентрический радиус-вектор ИСЗ в момент фотографирования t_i;

oi' — проекция радиуса-вектора ИСЗ на плоскость экватора;

α_i и δ_i — геоцентрические прямое восхождение и склонение ИСЗ;

угол Ω — угол между направлением оси ox в точку весеннего равноденствия γ и положительным направлением линии узлов $o\Omega$, угол Ω называется **долготой восходящего узла** и обозначается так же, как и сам восходящий узел, буквой Ω;

J — **угол наклона** (наклонение) плоскости орбиты к плоскости экватора;

точка Π_i — **перицентр орбиты**, точка орбиты, наиболее близко расположенная к центру масс o Земли (фокусу орбитального эллипса);

угол ω — **аргумент перицентра**, отсчитывается в плоскости орбиты от положительного направления линии узлов $o\Omega$ до направления $o\Pi$ в перицентр,

J, Ω, ω являются эйлеровыми углами, определяющими ориентацию орбитальной системы координат относительно геоцентрической системы координат.

Пусть в момент фотографирования t_i на снимке, полученном топографической камерой, установленной на борту ИСЗ, изобразилась некоторая точка j физической поверхности Земли. Рассмотрим треугольник oij, сторонами которого являются геоцентриче-

ский радиус-вектор ИСЗ $\mathbf{r}_i$, геоцентрический радиус вектор $\mathbf{r}_j$ точки j и спутникоцентрический радиус-вектор $\bar{\mathbf{r}}_{ij}$ точки. Из решения векторного треугольника имеем:

$$\bar{\mathbf{r}}_{ij} = -(\bar{\mathbf{r}}_i - \bar{\mathbf{r}}_j), \tag{161}$$

т. е. в любой момент t_i спутникоцентрический вектор точки поверхности j равен разности геоцентрического вектора ИСЗ и геоцентрического вектора точки j, взятой с обратным знаком.

Рассмотрим спутникоцентрическую инерциальную систему координат $ix'y'z'$, начало которой совпадает с задней узловой точкой объектива топографической камеры, а оси параллельны соответствующим осям геоцентрической системы координат $oxyz$. Тогда спутникоцентрической вектор $\bar{\mathbf{r}}_{ij}$ точки j в инерциальной системе координат можно выразить в координатной форме:

$$\bar{\mathbf{r}}_{ij} = \begin{bmatrix} x_j - x_i \\ y_j - y_i \\ z_j - z_i \end{bmatrix} = r_{ij} \begin{bmatrix} \cos\alpha_{ij} & \cos\delta_{ij} \\ \sin\alpha_{ij} & \cos\delta_{ij} \\ & \sin\delta_{ij} \end{bmatrix}, \tag{162}$$

где α_{ij} и δ_{ij} — спутникоцентрические прямое восхождение и склонение точки i. Причем

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \operatorname{arctg}\frac{y_j - y_i}{x_j - x_i}; \\ \delta_{ij} &= \operatorname{arctg}\frac{z_j - z_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}. \end{aligned} \tag{163}$$

Выражение (161) можно записать также в координатной форме:

$$\bar{\mathbf{r}}_{ij} = r_{ij} \begin{bmatrix} \cos\alpha_{ij} & \cos\delta_{ij} \\ \sin\alpha_{ij} & \cos\delta_{ij} \\ & \sin\delta_{ij} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x_i - x_j \\ y_i - y_j \\ z_i - z_j \end{bmatrix}. \tag{164}$$

Величины α_{ij}, δ_{ij} и $\bar{\mathbf{r}}_{ij}$, входящие в выражение (164), определяют в космической фотограмметрии по результатам бортовых измерений. При этом спутникоцентрические прямое восхождение α_{ij} и склонение δ_{ij} определяют из фотограмметрической обработки синхронных снимков, а спутникоцентрическое расстояние r_{ij} может быть определено для единственной точки снимка по результатам показаний лазерного дальномера, установленного на борту ИСЗ.

В период монтажа звездной и топографической камер тщательно определяют взаимную ориентацию их систем координат, в результате чего составляют ортогональную матрицу $\mathbf{\Pi}_0$ взаимной ориентации топографического и звездного снимков.

Однако в процессе запуска и космического полета (вследствие деформаций корпуса ИСЗ и температурных влияний) значения элементов оператора Π_0 могут измениться, поэтому их следует уточнять в процессе космического фотографирования.

Пусть вектор

$$\bar{r}_{j(t)} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_j \\ \tilde{y}_j \\ -f_t \end{pmatrix} \tag{165}$$

определяет положение точки j в системе координат топографического снимка, полученного в момент t_i.

Перейдем к единичному вектору $\bar{r}_j^0$ в системе координат топографического снимка, для чего введем нормирующий множитель Δ,

$$\Delta = \sqrt{x_j^2 + y_j^2 + l_t^2}. \tag{166}$$

Тогда единичный вектор $\bar{r}^0_{j(t)}$ представим в виде

$$\bar{r}^0_{j(t)} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \tilde{x}_j \\ \tilde{y}_j \\ -f_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{l}_j \\ \tilde{m}_j \\ \tilde{n}_j \end{pmatrix}_t. \tag{167}$$

При умножении вектора $\bar{r}^0_{j(t)}$ на оператор Π_0 получим единичный вектор $\bar{r}^{0*}_{j(t)}$ направления на точку j в системе координат звездного снимка:

$$\bar{r}^{0*}_{j(t)} = \begin{pmatrix} l_j^* \\ m_j^* \\ n_j^* \end{pmatrix}_t = \Pi_0 \begin{pmatrix} \tilde{l}_j \\ \tilde{m}_j \\ \tilde{n}_j \end{pmatrix}_t. \tag{168}$$

Установим ориентацию звездного снимка относительно инерциальной системы координат в момент времени t_i. Пусть на звездном снимке, полученном в момент времени t_i, изобразилось n звезд. Можно измерить координаты каждой звезды в системе координат звездного снимка x^* и y^* и получить единичный вектор $\bar{r}^{0*}_{k(t)}$ направления на k-ю звезду в системе координат звездного снимка:

$$\bar{r}^{0*}_{k(t)} = \frac{1}{\Delta_k^*}\begin{pmatrix} x_k^* \\ y_k^* \\ -f^* \end{pmatrix}_t. \tag{169}$$

С другой стороны, для каждой k-й звезды после ее опознавания (установления номера по каталогу) можно определить инерциальные координаты α_k и δ_k и вычислить единичный вектор $\bar{r}_k^0$ в инерциальной системе координат:

$$\bar{r}_k^0 = \begin{pmatrix} L_k \\ M_k \\ N_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_k \cos\delta_k \\ \sin\alpha_k \cos\delta_k \\ \sin\delta_k \end{pmatrix}. \tag{170}$$

Таким образом, можно составить n уравнений вида

$$\bar{r}_k^0 = \begin{pmatrix} \cos\alpha_k \cos\delta_k \\ \sin\alpha_k \cos\delta_k \\ \sin\delta_k \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_k^*} \Pi_i^* \begin{pmatrix} x_k^* \\ y_k^* \\ -f^* \end{pmatrix}_i = \Pi_i^* \bar{r}_{k(i)}^{0*}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{171}$$

в которых Π_i^* — оператор, устанавливающей ориентацию системы координат звездного снимка относительно инерциальной системы координат в момент фотографирования t_i.

Элементы этого оператора, а точнее три эйлеровых угла, определяют методом наименьших квадратов. Обычно, кроме трех эйлеровых углов, определяющих оператор Π_i^*, в качестве неизвестных в уравнительные вычисления включают фокусное расстояние f^* звездной камеры, координаты главной точки x_0, y_0 звездного снимка, а также параметры, характеризующие дисторсию объектива. Если известно значение оператора ориентации звездного снимка, то можно определить единичный вектор $\bar{r}_{ij}^0$ спутникоцентрического направления на точку поверхности j:

$$\bar{r}_{ij}^0 = \Pi_i^* \Pi_0 \begin{pmatrix} \tilde{l}_j \\ \tilde{m}_j \\ \tilde{n}_j \end{pmatrix}_i. \tag{172}$$

Как было указано выше, при наличии на борту ИСЗ лазерного дальномера можно найти три компоненты спутникоцентрического вектора для одной из точек топографического снимка (точка отражения импульса):

$$\bar{r}_{ij} = r_{ij} \Pi_i^* \Pi_0 \begin{pmatrix} \tilde{l}_j \\ \tilde{m}_j \\ \tilde{n}_j \end{pmatrix}. \tag{173}$$

Таким образом, подставив значение спутникоцентрического вектора из уравнения (173) в уравнение (161), получим

$$r_{ij}\Pi_i^*\Pi_j\begin{pmatrix}\tilde{l}_{ij}\\ \tilde{m}_{ij}\\ \tilde{n}_{ij}\end{pmatrix}=-(\bar{\mathbf{r}}_i-\bar{\mathbf{r}}_j). \tag{174}$$

Уравнение (174) является фундаментальным уравнением космической фотограмметрии. В самом деле, оно связывает геоцентрические координаты определяемой точки планеты j, координаты спутника в момент съемки i и компоненты спутникоцентрического вектора $\bar{\mathbf{r}}_{ij}$, которые получают в результате фотограмметрической обработки космических снимков и показаний бортового дальномера.

Геоцентрический вектор ИСЗ $\bar{\mathbf{r}}_i(t_i)$ определяют на основании теории движения спутника, основная задача которой — получить математическую модель, адекватно описывающую реальное движение ИСЗ.

В самом общем случае движение ИСЗ вокруг центра масс Земли в инерциальной системе координат можно задать системой трех нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=\frac{\partial V}{\partial x}+Q_x;\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=\frac{\partial V}{\partial y}+Q_y;\\ \frac{d^2z}{dt^2}&=\frac{\partial V}{\partial z}+Q_z.\end{aligned} \tag{175}$$

Правые части этих уравнений представляют собой ускорения, создаваемые гравитационными силами $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$, к числу которых относятся земное тяготение, притяжение спутника Солнцем, Луной и планетами, а также ускорения, вызванные сопротивлением атмосферы и давлением солнечного излучения (Q_x, Q_y, Q_z).

Интегрирование уравнений (175) для моментов фотографирования t_i позволяет получить координаты спутника x_i, y_i, z_i и составляющие скорости $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$ в эти моменты. Однако начальные условия интегрирования системы (175) — координаты x_0, y_0, z_0 и составляющие скорости $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$ в некоторый момент времени t_0 необходимо определить из наблюдений ИСЗ.

Вообще, определение орбиты ИСЗ заключается в определении начальных условий x_0, y_0, z_0, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$ для момента времени t_0 по совокупности измерений, выполненных за период времени $t_i - t_0$. При этом начальные условия будут определены с ошибками, описать которые можно ковариационной матрицей $\underset{(6\times6)}{\mathbf{K}_0}$ начальных условий. После того как начальные условия (орбита) определены, из интегрирования дифференциальных уравнений движения (175) получают координаты x_i, y_i, z_i и составляющие скорости $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$ на момент времени фотографирования t_i.

Орбита ИСЗ определяется, как правило, по результатам наземных наблюдений с пунктов, координаты которых известны. Для определения орбит используются результаты лазерных и фотографических наземных наблюдений. Наиболее широко применяются радиотехнические системы, основанные на эффекте Доплера и позволяющие определять скорости изменения топоцентрических расстояний до спутника $\dot{r}_{ij} = \frac{dr_{ij}}{dt}$ или разности расстояний $r_{ji} - r_{jk}$.

Определение координат ИСЗ сопровождается следующими ошибками.

Ошибки, обусловленные погрешностями орбитальных измерений с пунктов наблюдений ИСЗ, которые приводят к неточному определению начальных условий интегрирования уравнений движения.

Ошибки, вызванные несовершенством математической модели движения. В правых частях дифференциальных уравнений движения необходимо учитывать действие весьма большого количества факторов — модель гравитационного поля Земли, модель атмосферы, давление солнечной радиации, притяжение спутника Солнцем и Луной. Математические модели всех этих сил несовершенны, что проявляется в процессе интегрирования уравнений движения. Возникающие вследствие этого ошибки определения координат ИСЗ возрастают с увеличением интервала времени $t_i - t_0$.

Методические ошибки собственно интегрирования, обусловленные несовершенством математических методов интегрирования уравнений движения. Методы интегрирования делятся на аналитические и численные. В аналитических методах интегралы дифференциальных уравнений движения имеют вид формул, предписывающих выполнение системы математических операций. В процессе вывода формул пренебрегают некоторыми «малыми» членами, а в разложениях решений в ряды ограничивают порядок разложений: все это приводит к методическим ошибкам. В численных методах результатом решения являются таблицы координат и составляющих скорости для равноотстоящих, как правило, значений независимой переменной. При этом быстро накаплива-

ются ошибки округления. Грубо говоря, ошибки в координатах и скорости пропорциональны $n^{3/2}$, где n — число шагов численного интегрирования.

§ 12. ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ КОСМИЧЕСКОЙ ФОТОГРАММЕТРИИ В ГРИНВИЧСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

На практике для координатно-временной привязки результатов космических съемок координаты точек земной поверхности необходимо получать в геоцентрической системе координат, жестко связанной с вращающейся планетой. В дальнейшем будем полагать, что система координат общего земного эллипсоида $oX_\Gamma Y_\Gamma Z_\Gamma$ и гринвичская система координат $oXYZ$ практически совпадают, т. е. центр масс Земли совпадает с центром общего земного эллипсоида, а соответствующие оси коллинеарны.

В гринвичской системе координат, полагая, что движения полюсов учтены, уравнения (164) будут иметь вид

$$\bar{\mathbf{R}}_{ij} = R_{ij}\begin{bmatrix}\cos(\alpha_{ij}-S_i)\cos\delta_{ij}\\ \sin(\alpha_{ij}-S_i)\cos\delta_{ij}\\ \sin\delta_{ij}\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}X_i-X_j\\ Y_i-Y_j\\ Z_i-Z_j\end{bmatrix}, \tag{176}$$

где S_i — звездное время в Гринвиче, соответствующее моменту фотографирования t_i. Соответственно и формула (174) для спутникоцентрического вектора $\bar{\mathbf{R}}_{ij}$ в гринвичской системе координат будет следующей:

$$\bar{\mathbf{r}}^0_{ij} = \mathbf{S}\Pi_i^*\Pi_0\begin{pmatrix}\tilde{l}_j\\ \tilde{m}_j\\ \tilde{n}_j\end{pmatrix}_i, \tag{177}$$

где $\mathbf{S}$ — матрица перехода к гринвичской системе координат,

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix}\cos S & -\sin S & 0\\ -\sin S & \cos S & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}. \tag{178}$$

Фундаментальное уравнение космической фотограмметрии в гринвичской системе координат представим в виде

$$R_{ij}\mathbf{S}_i\Pi_i^*\Pi_0\begin{pmatrix}\tilde{l}_{ij}\\ \tilde{m}_{ij}\\ \tilde{n}_{ij}\end{pmatrix} = -(\bar{\mathbf{R}}_i-\bar{\mathbf{R}}_j). \tag{179}$$

§ 13. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ КОСМИЧЕСКОЙ ФОТОГРАММЕТРИИ В ВИДЕ УРАВНЕНИЙ КОЛЛИНЕАРНОСТИ

Напишем уравнение (179) в следующей форме:

$$\bar{\mathbf{R}}_{ij} = \frac{R_{ij}}{\Delta_{ij}} \mathbf{S}_i \mathbf{\Pi}_i^* \mathbf{\Pi}_0 \begin{pmatrix} \tilde{x}_j \\ \tilde{y}_j \\ -\tilde{f}_t \end{pmatrix} = -(\bar{\mathbf{R}}_i - \bar{\mathbf{R}}_j), \tag{180}$$

откуда следует, что

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_j \\ \tilde{y}_j \\ -f_t \end{pmatrix} = \frac{\Delta_{ij}}{R_{ij}} (\mathbf{S}_i \mathbf{\Pi}_i^* \mathbf{\Pi}_0)^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} X_j - X_i \\ Y_j - Y_i \\ Z_j - Z_i \end{pmatrix}. \tag{181}$$

Величина $\frac{\Delta_{ij}}{R_{ij}}$ в правой части уравнения (181) является масштабным коэффициентом. Введем следующие обозначения:

$$\frac{\Delta_{ij}}{R_{ij}} = \frac{1}{m}; \quad (\mathbf{S}_i \mathbf{\Pi}_i^* \mathbf{\Pi}_0)^{\mathrm{T}} = \mathbf{\Pi}_i. \tag{182}$$

Ортогональная матрица $\mathbf{\Pi}_i$ осуществляет переход от системы гринвичских координат к системе координат топографического снимка. Для задания матрицы $\mathbf{\Pi}_i$ выберем те же эйлеровы углы, что и при задании матрицы перехода от орбитальной системы координат к инерциальной, но будем их записывать со штрихом: Ω', ω', J'.

Покажем эти углы на спутникоцентрической сфере единичного радиуса с центром в точке i, являющейся мгновенным положением ИСЗ на орбите в момент фотографирования (рис. 14). Поскольку оптическая ось топографической камеры f_t приближенно отслеживает центр масс Земли, ее спутникоцентрическое склонение $\delta_f \approx -\delta_i$. Линия $i\Omega'$ — положительное направление линии пересечения плоскости топографического снимка и спутникоцентрического экватора, $iX'Y'Z'$ — спутникоцентрическая гринвичская система координат, $i\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ — система координат топографического снимка, $\bar{\mathbf{r}}_{ij}$ — спутникоцентрический вектор точки j поверхности Земли.

Введем эйлеровы углы:

Ω' — угол между положительным направлением оси iX' спутникоцентрической гринвичской системы координат и положитель-

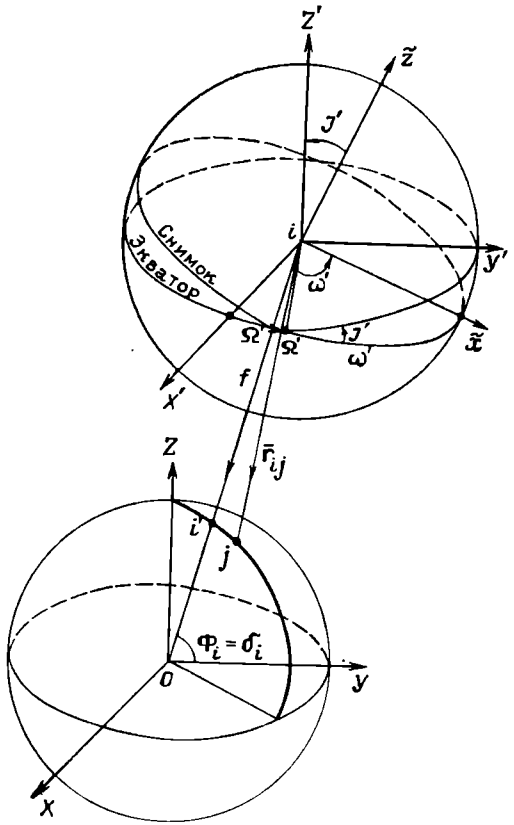

Рис. 14. Топографический снимок в инерциальном пространстве

ным направлением линии $i\Omega'$ пересечения снимка с плоскостью спутникоцентрического экватора;

ω' — угол отсчитываемый в плоскости топографического снимка от положительного направления линии $i\Omega'$ до положительного направления абсциссы $i\tilde{x}$ топографического снимка;

J' — угол наклона снимка к плоскости экватора, равный углу между осью iZ' спутникоцентрической гринвичской системы координат и осью $i\tilde{z}$ снимка. Ось $i\tilde{z}$ совпадает с оптической осью топографической камеры, но противоположна по направлению.

На основании выражений (79) напишем формулы, представляющие элементы a_{ik} матрицы $\mathbf{\Pi}_t$ через эйлеровы углы Ω', ω' и J':

$$\mathbf{\Pi}_t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}. \tag{183}$$

где

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \cos\omega'\cos\Omega' - \cos\omega'\sin\Omega'\cos J'; & a_{12} &= \cos\omega'\sin\Omega' + \sin\omega'\cos\Omega'\cos J'; & a_{13} &= \sin\omega'\sin J';\\
a_{21} &= -\sin\omega'\cos\Omega' - \cos\omega'\sin\Omega'\cos J'; & a_{22} &= -\sin\omega'\sin\Omega' + \cos\omega'\cos\Omega'\cos J'; & a_{23} &= \cos\omega'\sin J';\\
a_{31} &= \sin\Omega'\sin J'; & a_{32} &= -\cos\Omega'\sin J'; & a_{33} &= \cos J'.
\end{aligned} \tag{184}$$

Исключив масштабный коэффициент $1/m$, напишем уравнение (181) в виде уравнений коллинеарности:

$$\tilde{x}_{ij} = -f_t \frac{a_{11}(X_j - X_i) + a_{12}(Y_j - Y_i) + a_{13}(Z_j - Z_i)}{a_3\,(X_j - X_i) + a_{32}(Y_j - Y_i) - a_{33}(Z_j - Z_i)} = -f_t \frac{U_{ij}}{W_{ij}};$$

$$\tilde{y}_{ij} = -f_t \frac{a_{21}(X_j - X_i) + a_{22}(Y_j - Y_i) + a_{23}(Z_j - Z_i)}{a_{31}(X_j - X_i) + a_{32}(Y_j - Y_i) + a_{33}(Z_j - Z_i)} = -f_t \frac{V_{ij}}{W_{ij}}. \qquad (185)$$

§ 14. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ КОЛЛИНЕАРНОСТИ

Для каждой точки топографического снимка, например для точки j с координатами $\tilde{x}_{ij}$ и $\tilde{y}_{ij}$, составляют два уравнения со следующими неизвестными (см. рис. 14):

элементы внешнего углового Ω_i', ω_i', J_i' ориентирования топографического снимка в момент фотографирования t_i;

гринвичские координаты точки поверхности X_j, Y_j, Z_j;

гринвичские координаты центра фотографирования X_i, Y_i, Z_i.

Таким образом, каждое из уравнений (185) содержит девять неизвестных. При этом предполагаем, что координаты главной точки снимка $\tilde{x}_0$, $\tilde{y}_0$, фокусное расстояние f_t и параметры дисторсии известны по результатам калибровки камеры.

Разложив уравнение (185) в ряды Тэйлора и ограничиваясь только линейными членами, получим:

$$d\tilde{x}_{ij} = \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial(\Omega_i', \omega_i', J_i')} \begin{bmatrix} d\Omega_i' \\ d\omega_i' \\ dJ_i' \end{bmatrix} + \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial(X_j, Y_j, Z_j)} \begin{bmatrix} dX_j \\ dY_j \\ dZ_j \end{bmatrix} + \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial(X_i, Y_i, Z_i)} \begin{bmatrix} dX_i \\ dY_i \\ dZ_i \end{bmatrix};$$

$$d\tilde{y}_{ij} = \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial(\Omega_i', \omega_i', J_i')} \begin{bmatrix} d\Omega_i' \\ d\omega_i' \\ dJ_i' \end{bmatrix} + \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial(X_j, Y_j, Z_j)} \begin{bmatrix} dX_j \\ dY_j \\ dZ_j \end{bmatrix} + \frac{\partial y_{ij}}{\partial(X_i, Y_i, Z_i)} \begin{bmatrix} dX_i \\ dY_i \\ dZ_i \end{bmatrix}. \qquad (186)$$

Объединив теперь оба уравнения в одно матричное уравнение, представим его в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} d\tilde{x}_{ij} \\ d\tilde{y}_{ij} \end{bmatrix} = \frac{\partial(\tilde{x}_{ij}, \tilde{y}_{ij})}{\partial(\Omega_i', \omega_i', J_i')} \begin{bmatrix} d\Omega_i' \\ d\omega_i' \\ dJ_i' \end{bmatrix} + \frac{\partial(\tilde{x}_{ij}, \tilde{y}_{ij})}{\partial(X_j, Y_j, Z_j)} \begin{bmatrix} dX_j \\ dY_j \\ dZ_j \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{\partial(\tilde{x}_{ij}, \tilde{y}_{ij})}{\partial(X_i, Y_i, Z_i)} \begin{bmatrix} dX_i \\ dY_i \\ dZ_i \end{bmatrix}. \qquad (187)$$

Для матриц и векторов правой части уравнения (187) введем следующие обозначения:

$$\underset{(2,3)}{\hat{\mathbf{B}}_{ij}^{(1)}} = \frac{\partial(\tilde{x}_{ij}, \tilde{y}_{ij})}{\partial(\Omega_i', \omega_i', J_i')} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial \Omega_i'} & \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial \omega_i'} & \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial J_i'} \\ \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial \Omega_i'} & \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial \omega_i'} & \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial J_i'} \end{bmatrix}; \quad \underset{(3,1)}{\bar{\hat{\delta}}_{ij}^{(1)}} = \begin{bmatrix} d\Omega_i' \\ d\omega_i' \\ dJ_i' \end{bmatrix}; \qquad (188)$$

$$\underset{(2,3)}{\ddot{\mathbf{B}}_{ij}} = \frac{\partial(\tilde{x}_{ij}, \tilde{y}_{ij})}{\partial(X_j, Y_j, Z_j)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial X_j} & \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial Y_j} & \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial Z_j} \\ \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial X_j} & \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial Y_j} & \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial Z_j} \end{bmatrix}; \quad \underset{(3,1)}{\bar{\ddot{\delta}}_j} = \begin{bmatrix} dX_j \\ dY_j \\ dZ_j \end{bmatrix}; \qquad (189)$$

$$\underset{(2,3)}{\hat{\mathbf{B}}_{ij}^{(2)}} = \frac{\partial(\tilde{x}_{ij}, \tilde{y}_{ij})}{\partial(X_i, Y_i, Z_i)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial X_i} & \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial Y_i} & \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial Z_i} \\ \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial X_i} & \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial Y_i} & \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial Z_i} \end{bmatrix}; \quad \underset{(3,1)}{\bar{\hat{\delta}}_{ij}^{(2)}} = \begin{bmatrix} dX_i \\ dY_i \\ dZ_i \end{bmatrix}. \qquad (190)$$

Тогда линеаризированное уравнение (187) примет следующий компактный вид:

$$\begin{bmatrix} d\tilde{\lambda}_{ij} \\ d\tilde{y}_{ij} \end{bmatrix} = \underset{(2,3)}{\hat{\mathbf{B}}_{ij}^{(1)}} \underset{(3,1)}{\bar{\hat{\delta}}_{ij}^{(1)}} + \underset{(2,3)}{\ddot{\mathbf{B}}_{ij}} \underset{(3,1)}{\bar{\ddot{\delta}}_j} + \underset{(2,3)}{\hat{\mathbf{B}}_{ij}^{(2)}} \underset{(3,1)}{\bar{\hat{\delta}}_{ij}^{(2)}}. \qquad (191)$$

Далее необходимо получить формулы для 18 производных, входящих в матрицы (188), (189) и (190).

Формулы для производных от координат точки снимка $\tilde{x}_{ij}$, $\tilde{y}_{ij}$ *по эйлеровым углам* Ω_i', ω_i' *и* J_i'. Для нахождения производных, являющихся элементами матрицы $\mathbf{B}_{ij}^{(1)}$, запишем развернутые вы-

ражения для величин U_{ij}, V_{ij} и W_{ij}, входящих в формулы (185):

$$U_{ij}=a_{11}(X_j-X_i)+a_{12}(Y_j-Y_i)+a_{13}(Z_j-Z_i)=$$
$$=(\cos\omega_i'\cos\Omega_i'-\sin\omega_i'\sin\Omega_i'\cos J_i')(X_j-X_i)+$$
$$+(\cos\omega_i'\sin\Omega_i'+\sin\omega_i'\cos\Omega_i'\cos J_i')(Y_j-Y_i)+$$
$$+\sin\omega_i'\sin J_i'(Z_j-Z_i); \qquad (192)$$

$$V_{ij}=a_{21}(X_j-X_i)+a_{22}(Y_j-Y_i)+a_{23}(Z_j-Z_i)=$$
$$=(-\sin\omega_i'\cos\Omega_i'-\cos\omega_i'\sin\Omega_i'\cos J_i'(X_j-X_i)+$$
$$+(-\sin\omega_i'\sin\Omega_i'+\cos\omega_i'\cos\Omega_i'\cos J_i')(Y_j-Y_i)+$$
$$+\cos\omega_i'\sin J_i'(Z_j-Z_i); \qquad (193)$$

$$W_{ij}=a_{31}(X_j-X_i)+a_{32}(Y_j-Y_i)+a_{33}(Z_j-Z_i)=$$
$$=\sin\Omega_i'\sin J_i'(X_j-X_i)+(-\cos\Omega_i'\sin J_i')(Y_j-Y_i)+$$
$$+\cos J_i'(Z_j-Z_i). \qquad (194)$$

Дифференцируя выражения (192), (193) и (194) для U_{ij}, V_{ij} и W_{ij} по эйлеровым углам Ω_i', ω_i' и J_i', получим следующие выражения:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial U_{ij}}{\partial \Omega_i'} \\ \frac{\partial U_{ij}}{\partial \omega_i'} \\ \frac{\partial U_{ij}}{\partial J_i'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{12} & a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13}\sin\Omega_i' & -a_{13}\cos\Omega_i' & a_{33}\sin\omega_i' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_j-X_i \\ Y_j-Y_i \\ Z_j-Z_i \end{bmatrix}; \qquad (195)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial V_{ij}}{\partial \Omega_i'} \\ \frac{\partial V_{ij}}{\partial \omega_i'} \\ \frac{\partial V_{ij}}{\partial J_i'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{22} & a_{21} & 0 \\ -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ a_{23}\sin\Omega_i' & -a_{23}\cos\Omega_i' & a_{33}\cos\omega_i' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_j-X_i \\ Y_j-Y_i \\ Z_j-Z_i \end{bmatrix}; \qquad (196)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial W_{ij}}{\partial \Omega_i'} \\ \frac{\partial W_{ij}}{\partial \omega_i'} \\ \frac{\partial W_{ij}}{\partial J_i'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{32} & a_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{33}\sin\Omega_i' & -a_{33}\cos\Omega_i' & -\sin J_i' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_j-X_i \\ Y_j-Y_i \\ Z_j-Z_i \end{bmatrix}. \qquad (197)$$

Дифференцируя уравнения коллинеарности (185) по U_{ij}, V_{ij} и W_{ij}, получим

$$\frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial \varkappa_{i'}} = -\chi_{ij}\left(W_{ij}\frac{\partial U_{ij}}{\partial \varkappa_{i'}} - U_{ij}\frac{\partial W_{ij}}{\partial \varkappa_{i'}}\right);$$

$$\frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial \varkappa_{i'}} = -\chi_{ij}\left(W_{ij}\frac{\partial V_{ij}}{\partial \varkappa_{i'}} - V_{ij}\frac{W_{ij}}{\partial \varkappa_{i'}}\right);$$

$$\frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial \omega_{i'}} = -\chi_{ij}\left(W_{ij}\frac{\partial U_{ij}}{\partial \omega_{i'}} - U_{ij}\frac{\partial W_{ij}}{\partial \omega_{i'}}\right);$$

$$\frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial \omega_{i'}} = -\chi_{ij}\left(W_{ij}\frac{\partial V_{ij}}{\partial \omega_{i'}} - V_{ij}\frac{\partial W_{ij}}{\partial \omega_{i'}}\right); \qquad (198)$$

$$\frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial \varkappa_{i'}} = -\chi_{ij}\left(W_{ij}\frac{\partial U_{ij}}{\partial \varkappa_{i'}} - U_{ij}\frac{\partial W_{ij}}{\partial \varkappa_{i'}}\right);$$

$$\frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial \varkappa_{i'}} = -\chi_{ij}\left(W_{ij}\frac{\partial V_{ij}}{\partial \varkappa_{i'}} - V_{ij}\frac{\partial W_{ij}}{\partial \varkappa_{i'}}\right),$$

где введено обозначение

$$\chi_{ij} = \frac{f_t}{W_{ij}^2}. \qquad (199)$$

Отметим, что единицей размерности производных, входящих в матрицу $\underset{(2,3)}{\hat{\mathbf{B}}_j^{(1)}}$ является миллиметр, если фокусное расстояние выражено в миллиметрах, и метр, если фокусное расстояние выражено в долях метра.

Формулы для производных от координат точек снимка $\tilde{x}_{ij}$, $\tilde{y}_{ij}$ по гринвичским координатам X_t, Y_t, Z_t ИСЗ в момент фотографирования t_i. Получим формулы для вычисления производных, являющихся элементами матрицы $\underset{(2,3)}{\mathbf{B}_{ij}^{(2)}}$.

Дифференцируя выражения U_{ij}, V_{ij} и W_{ij} (192) — (194) по X_i, Y_i, Z_i, получим:

$$dU_i = -[a_{11}dX_i + a_{12}dY_i + a_{13}dZ_i];$$

$$dV_i = -[a_{21}dX_i + a_{22}dY_i + a_{23}dZ_i]; \qquad (200)$$

$$dW_i = -[a_{31}dX_i + a_{32}dY_i + a_{33}dZ_i].$$

Составим выражение $W_{ij}dU_i - U_{ij}dW_i$. После элементарных преобразований приводим его к следующему виду:

$$W_{ij}dU_i - U_{ij}dW_i = \begin{bmatrix} 0 & a_{12}a_{31} - a_{32}a_{11} & a_{13}a_{31} - a_{11}a_{33} \\ a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12} & 0 & a_{13}a_{32} - a_{33}a_{12} \\ a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13} & a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13} & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} X_j - X_i \\ Y_j - Y_i \\ Z_j - Z_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX_j \\ dY_j \\ dZ_j \end{bmatrix}. \qquad (201)$$

Так как матрица $\mathbf{\Pi}_i$ ортогональна, то $a_{12}a_{31} - a_{32}a_{11} = a_{23}$; $a_{13}a_{32} - a_{33}a_{12} = a_{21}$; $a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13} = a_{22}$, и поэтому

$$W_{ij}dU_i - U_{ij}dW_i = \begin{bmatrix} 0 & a_{23} & -a_{22} \\ -a_{23} & 0 & a_{21} \\ a_{22} & -a_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_j - X_i \\ Y_j - Y_i \\ Z_j - Z_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX_i \\ dY_i \\ dZ_i \end{bmatrix}^T. \qquad (202)$$

Поскольку $d\tilde{x}_{ij} = -\chi_{ij}(W_{ij}dU_i - U_{ij}dW_i)$, выразим производные в следующем виде:

$$\frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial X_i} = -\chi_{ij}[a_{21}(Y_j - Y_i) - a_{22}(Z_j - Z_i)];$$

$$\frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial Y_i} = -\chi_{ij}[-a_{23}(X_j - X_i) + a_{21}(Z_j - Z_i)]; \qquad (203)$$

$$\frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial Z_i} = -\chi_{ij}[a_{22}(X_j - X_i) - a_{21}(Y_j - Y_i)].$$

Аналогичным образом составим выражение $W_{ij}dV_i - V_{ij}dW_i$, при этом производные от $\tilde{y}_{ij}$ по X_i, Y_i и Z_i будут следующими:

$$\frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial X_i} = -\chi_{ij}[-a_{13}(Y_j - Y_i) + a_{12}(Z_j - Z_i)];$$

$$\frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial Y_i} = -\chi_{ij}[a_{13}(X_j - X_i) - a_{11}(Z_j - Z_i)]; \qquad (204)$$

$$\frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial Z_i} = -\chi_{ij}[-a_{12}(X_j - X_i) + a_{11}(Z_j - Z_i)].$$

Размерность элементов матрицы $\underset{(2,3)}{\hat{\mathbf{B}}_{ij}^{(2)}}$ — мм/м, если фокусное расстояние f_i выражено в миллиметрах; матрица безразмерна, если фокусное расстояние выражено в долях метра.

Формулы для производных от координат точки снимка $\tilde{x}_{ij}$, $\tilde{y}_{ji}$ по координатам центра фотографирования X_i, Y_{ij}, Z_{ij}. Непосредственно из уравнений коллинеарности (185) следует, что элемен-

ты матрицы $\underset{(2,3)}{\mathbf{B}_{ij}^{(2)}}$ равны соответствующим элементам матрицы $\underset{(2,3)}{\ddot{\mathbf{B}}_{ij}}$, но с обратным знаком. Таким образом, имеем

$$\underset{(2,3)}{\hat{\mathbf{B}}_{ij}^{(2)}} = -\underset{(2,3)}{\ddot{\mathbf{B}}_{ij}}. \tag{205}$$

Уравнение поправок, соответствующее линеаризированному уравнению коллинеарности. Пусть $\Omega_i'^{(0)}$, $\omega_i'^{(0)}$ и $J_i'^{(0)}$ — приближенные значения эйлеровых углов; $X_j^{(0)}$, $Y_j^{(0)}$, $Z_j^{(0)}$ — приближенные значения гринвичских координат точки j; $X_i^{(0)}$, $Y_i^{(0)}$, $Z_i^{(0)}$ — приближенные значения координат центров фотографирования в гринвичской системе координат.

При этом $\tilde{x}_{ij}^0$, $\tilde{y}_{ij}^0$ — измеренные на снимке координаты точки j, а $\tilde{x}_{ij}^{00}$ и $\tilde{y}_{ij}^{00}$ — их приближенные значения. Тогда вектор

$$\underset{(2,1)}{\bar{\varepsilon}_{ij}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{ij}^0 - \tilde{x}_{ij}^{00} \\ \tilde{y}_{ij}^0 - \tilde{y}_{ij}^{00} \end{bmatrix} \tag{206}$$

будет вектором свободных членов. В качестве вектора поправок в результаты измерений $\tilde{x}_{ij}^0$ и $\tilde{y}_{ij}^0$ примем вектор $\bar{\vartheta}_{ij}$:

$$\underset{(2,1)}{\bar{\vartheta}_j} = \left| \begin{matrix} \vartheta_x \\ \vartheta_y \end{matrix} \right|_j. \tag{207}$$

Тогда уравнение поправок, соответствующее линеаризированному уравнению коллинеарности, будет иметь вид

$$\underset{(2,3)}{\hat{\mathbf{B}}_{ij}^{(1)}} \underset{(3,1)}{\hat{\delta}_{ij}^{(1)}} + \underset{(2,3)}{\ddot{\mathbf{B}}_{ij}} \underset{(3,1)}{\ddot{\delta}_j} + \underset{(2,3)}{\hat{\mathbf{B}}_{ij}^{(2)}} \underset{(3,1)}{\hat{\delta}_{ij}^{(2)}} = \underset{(2,1)}{\bar{\varepsilon}_{ij}} + \underset{(2,1)}{\bar{\vartheta}_j}, \tag{208}$$

где $\underset{(3,1)}{\hat{\delta}_{ij}^{(1)}} = \begin{pmatrix} \delta\Omega_i' \\ \delta\omega_i' \\ \delta J_i' \end{pmatrix}$ — вектор поправок к приближенным значениям $\Omega_i'^{(0)}$, $\omega_i'^{(0)}$, $J_i'^{(0)}$ эйлеровых углов;

$\underset{(3,1)}{\ddot{\delta}_j} = \begin{pmatrix} \delta X_j \\ \delta Y_j \\ \delta Z_j \end{pmatrix}$ — вектор поправок к приближенным значениям $X_j^{(0)}$, $Y_j^{(0)}$, $Z_j^{(0)}$ точки поверхности в гринвичской системе координат;

$\underset{(3,1)}{\hat{\delta}_{ij}^{(2)}} = \begin{pmatrix} \delta X_i \\ \delta Y_i \\ \delta Z_i \end{pmatrix}$ — вектор поправок к приближенным значениям $X_i^{(0)}$, $Y_i^{(0)}$, $Z_i^{(0)}$ координат центров фотографирования.

Матрицы $\underset{(2,3)}{\hat{\mathbf{B}}_{ij}^{(1)}}$, $\underset{(2,3)}{\ddot{\mathbf{B}}_{ij}}$ и $\hat{\mathbf{B}}_{ij}^{(2)}$ вычисляют по приближенным значениям $(\Omega_i'^{(0)}, \omega_i'^{(0)}, J_i'^{(0)})$, $(X_j^{(0)}, Y_j^{(0)}, Z_j^{(0)})$, $(X_i^{(0)}, Y_i^{(0)}, Z_i^{(0)})$ уточняемых неизвестных.

Размерность уравнения поправок определяется размерностью свободного члена $\bar{\varepsilon}$ (в мм). Поэтому при $\chi_{ij} = \frac{f_t}{W_{ij}^2}$ (в мм/м²) поправки в эйлеровы углы будут в радианах, а координаты — в метрах.

Пример 7. Топографической камерой с f_t=100,0123 мм получен снимок, на котором изобразилась точка j с координатами $\tilde{x}_{ij}$ и $\tilde{y}_{ij}$.

Разности гринвичских координат точки j и спутника i в момент съемки: $X_j—X_i$=145 246,2 м; $Y_j—Y_i$=331 320,9 м; $Z_j—Z_i$=—297 384,9 м; эйлеровы углы, задающие ортогональную матрицу $\mathbf{П}_i = (\mathbf{S}\mathbf{П}_i{}^*\mathbf{П}_0)^{т}$: Ω_i'=32,121 461°, ω_i'= =47,912 136°, J_i'=52,378 210°.

Требуется вычислить координаты точки j на снимке $\tilde{x}_{ij}$ и $\tilde{y}_{ij}$.

Решеиие.

1. По формулам (184) вычислим элементы матрицы $\mathbf{П}_i$:

a_{11}=3,267 8687·10⁻¹; a_{12}=7,400 686·10⁻¹; a_{13}=5,878 0009·10⁻¹;

a_{21}=—8,460 7536·10⁻¹; a_{22}=—4,806 582·10⁻¹; a_{23}=5,308 9199·10⁻¹;

a_{31}=4,211 4955·10⁻¹; a_{32}=—6,708 1164·10⁻¹; a_{33}=6,104 4646·10⁻¹.

2. На основании уравнений коллинеарности (185) получим:

$\tilde{x}_{ij}$=34,404 291 мм; $\tilde{y}_{ij}$=—86,605 928 м.

Пример 8. Пусть малые приращеиия получили: гринвичские координаты ИСЗ δX_i=106 м, δY_i=—72 м, δZ_i=106 м; координаты точки j поверхности Земли: δX_j=—210 м, δY_j=—102 м, δZ_j=217 м; эйлеровы углы: $\delta\Omega_i'$=0,12°= =2,094 3931·10⁻³ рад., $\delta\omega_i'$ = —0,21° = —3,665 3479·10⁻³ рад., $\delta J_i'$=0,09°= =1,570 7948·10⁻³ рад.

Требуется определить приращеиия координат $\delta\tilde{x}_{ij}$ и $\delta\tilde{y}_{ij}$ координат точки j на топографическом сннмке, используя данные предыдущего примера.

Решение. Задачу будем решать на основании линеаризованных уравнений коллинеарности (191).

1. По формулам (195)—(197) вычислим:

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial \Omega_i'} = 779{,}17 \text{ м}; \quad \frac{\partial U_{ij}}{\partial \omega_i'} = -296\,693{,}7 \text{ м}; \quad \frac{\partial U_{ij}}{\partial J_i'} = -254\,265{,}24 \text{ м};$$

$$\frac{\partial V_{ij}}{\partial \Omega_i'} = -273\,341{,}07 \text{ м}; \quad \frac{\partial V_{ij}}{\partial \omega_i'} = -117\,861{,}87 \text{ м}; \quad \frac{\partial V_{ij}}{\partial J_i'} = -229\,648{,}45 \text{ м};$$

$$\frac{\partial W_{ij}}{\partial \Omega_i'} = 236\,968{,}49 \text{ м}; \quad \frac{\partial W_{ij}}{\partial \omega_i'} = 0{,}0; \quad \frac{\partial W_{ij}}{\partial J_i'} = 111\,397{,}31 \text{ м}.$$

2. По формулам (198) определим элементы матрицы $\underset{(2,3)}{\widehat{\mathbf{B}}_{ij}^{(1)}}$:

χ_{ij} =8,519 7167·10⁻¹⁰; U_{ij} = 117 861,87 м; V_{ij} = —296 693,7 м;

W_{ij} = —342 621,11 м;

$$\frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial \Omega_i'} = 24{,}022\,627 \text{ мм}; \quad \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial \omega_i'} = -86{,}605\,919 \text{ мм}; \quad \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial J_i'} = -63{,}034\,953 \text{ мм};$$

$$\frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial \Omega_i'} = -139{,}688\,83 \text{ мм}; \quad \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial \omega_i'} = -34\,404\,289 \text{ мм};$$

$$\frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial J_{i'}} = = 95{,}193665 \text{ мм}.$$

3. По формулам (203) и (204) найдем элементы матрицы $\hat{\mathbf{B}}_{ij}^{(2)}$:

$$\frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial X_i} = -1{,}376\,7995 \cdot 10^{-4}; \quad \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial Y_i} = -1{,}486\,6906 \cdot 10^{-4};$$

$$\frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial Z_i} = -2{,}328\,7885 \cdot 10^{-4}; \quad \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial X_i} = 3{,}534\,2825 \cdot 10^{-4};$$

$$\frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial Y_i} = -1{,}555\,3357 \cdot 10^{-4}; \quad \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial Z_i} = -6{,}638\,3077 \cdot 10^{-7}.$$

4. Элементы матрицы $\ddot{\mathbf{B}}_{ij}$ равны соответственно элементам матрицы $\hat{\mathbf{b}}_{ij}^{(2)}$ с обратным знаком.

Поэтому

$$\frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial X_j} = 1{,}376\,7995 \cdot 10^{-4}; \quad \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial Y_j} = 1{,}486\,6906 \cdot 10^{-4}; \quad \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial Z_j} = 2{,}328\,785 \cdot 10^{-4};$$

$$\frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial X_j} = -3{,}534\,2285 \cdot 10^{-4};$$

$$\frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial Y_j} = 1{,}555\,3357 \cdot 10^{-4}; \quad \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial Z_j} = 6{,}638\,3077 \cdot 10^{-4}.$$

5. Найдем приращение $d\tilde{x}_{ij}$ координаты $\tilde{x}_{ij}$ на снимке:

$$d\tilde{x}_{ij} = \left(\frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial \Omega_{i'}} \delta\Omega_{i'} + \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial \omega_{i'}} \delta\omega_{i'} + \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial J_{i'}} \delta J_{i'}\right) + \left(\frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial X_i} \delta X_i + \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial Y_i} \delta Y_i + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial Z_i} \delta Z_i\right) + \left(\frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial X_j} \delta X_j + \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial Y_j} \delta Y_j + \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial Z_j} \delta Z_j\right) =$$

$$= 24{,}022\,627 \cdot 2{,}094\,3931 \cdot 10^{-3} + (-86{,}605\,919)(-3{,}665\,3479 \cdot 10^{-3}) +$$

$$+ (-63{,}034\,953)\,1{,}570\,7948 \cdot 10^{-3} + (-1{,}376\,7995 \cdot 10^{-4})\,106 +$$

$$+ (-1{,}486\,6906 \cdot 10^{-4})(-72) + (-2{,}328\,7885 \cdot 10^{-4})\,106 +$$

$$+ (1{,}376\,7995 \cdot 10^{-4})(-210) + (1{,}486\,6906 \cdot 10^{-4})(-102) +$$

$$+ (2{,}328\,7885 \cdot 10^{-4})\,217 = 2{,}466\,2128 \cdot 10^{-1}.$$

6. Определим приращение $d\tilde{y}_{ij}$ координаты $\tilde{y}_{ij}$ на снимке:

$$d\tilde{y}_{ij} = \left(\frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial \Omega_{i'}} \delta\Omega_{i'} + \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial \omega_{i'}} \delta\omega_{i'} + \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial J_{i'}} \delta J_{i'}\right) + \left(\frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial X_i} \delta X_i + \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial Y_i} \delta Y_i + \right.$$

$$+\frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial Z_i}\delta Z_i\Big)+\Big(\frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial X_j}\delta X_j+\frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial Y_j}\delta Y_j+\frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial Z_j}\delta Z_j\Big)=$$

$$=-139{,}688\,83\cdot 2{,}094\,3931\cdot 10^{-3}+(-34{,}404\,289)\,(-3{,}665\,3479\cdot 10^{-3})+$$

$$+(-95{,}193\,665)\,1{,}570\,7948\cdot 10^{-3}+3{,}534\,2825\cdot 10^{-4}\cdot 106+$$

$$+(-1{,}555\,3357\cdot 10^{-4})\,(-72)+(-6{,}638\,3077\cdot 10^{-7})\,106+$$

$$+(-3{,}534\,2825\cdot 10^{-4})\,(-210)+(1{,}555\,3357\cdot 10^{-4})\,(-102)+$$

$$+6{,}638\,3077\cdot 10^{-7}\cdot 217=-2{,}088\,9834\cdot 10^{-1}.$$

7. Для проверки правильности полученных результатов, вычислим приращения $d\tilde{x}_{ij}$ и $d\tilde{y}_{ij}$ непосредственно по формулам коллинеарности.

С этой целью в соответствии с выражениями (184) вычислим варьированные элементы матрицы Π_i с эйлеровыми углами, равными

$$\Omega_i''=\Omega_i'+\delta\Omega_i'=52{,}468\,21^\circ;\ \omega_i''=\omega_i'+\delta\omega_i'=32{,}241\,461^\circ;\ J_i''=J_i'+\delta J_i'=$$

$$=47{,}702\,136^\circ.$$

Получим следующие значения элементов a'_{ik} матрицы Π_i':

$$a'_{11}=3{,}288\,259\,2\cdot 10^{-1};\ a'_{12}=7{,}401\,502\,6\cdot 10^{-1};\ a'_{13}=5{,}865\,588\,1\cdot 10^{-1};$$

$$a'_{21}=-8{,}443\,281\,1\cdot 10^{-1};\ a'_{22}=-4{,}783\,1\cdot 10^{-2};\ a'_{23}=5{,}336\,875\,1\cdot 10^{-1};$$

$$a'_{31}=4{,}230\,646\,3\cdot 10^{-1};\ a'_{32}=-6{,}707\,3830\cdot 10^{-1};\ a'_{33}=6{,}092\,015\,3\cdot 10^{-1}.$$

При этом варьированные приращения координат будут следующими:

$$(X_j-X_i)'=(X_j-X_i)+(\delta X_j-\delta X_i)=144\,930{,}2;$$

$$(Y_j-Y_i)'=(Y_j-Y_i)+(\delta Y_j-\delta Y_i)=331\,290{,}9;$$

$$(Z_j-Z_i)=(Z_j-Z_i)+(\delta Z_j-\delta Z_i)=-297\,273{,}9.$$

Далее по формулам (185) получаем варьированные координаты точки j на снимке:

$$\tilde{x}'_{ij}=34{,}651\,973\ \text{мм};\quad \tilde{y}'_{ij}=-86{,}815\,02\ \text{мм}.$$

Найдем точные приращения координат:

$$d\tilde{x}_{ij}=\tilde{x}'_{ij}-\tilde{x}_{ij}=+2{.}476\,82\cdot 10^{-1};\quad d\tilde{y}_{ij}=\tilde{y}'_{ij}-\tilde{y}_{ij}=-2{,}090\cdot 10^{-1}.$$

Сравнив этот результат с полученными из решения линеаризованных уравнений коллинеарности, убеждаемся, что три первые значащие цифры совпадают. Следовательно, вычисления выполнены верно.

Глава III
ОПРЕДЕЛЕНИЕ СПУТНИКОЦЕНТРИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЙ НА ТОЧКИ ПОВЕРХНОСТИ ПЛАНЕТЫ

§ 15. АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СПУТНИКОЦЕНТРИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЙ

Вектор $\bar{\mathbf{r}}^0_{ij}$, определяющий в момент съемки направление на точку поверхности планеты в инерциальной системе координат, вычисляют по формуле

$$\bar{\mathbf{r}}^0_{ij} = \mathbf{\Pi}_i^* \mathbf{\Pi}_0 \begin{pmatrix} \tilde{l}_j \\ \tilde{m}_j \\ \tilde{n}_j \end{pmatrix}, \tag{209}$$

где $\tilde{l}_j$, $\tilde{m}_j$, $\tilde{n}_j$ — направляющие косинусы в системе координат топографического снимка; $\mathbf{\Pi}_0$ — оператор перехода от системы координат топографического снимка к системе координат звездного снимка; $\mathbf{\Pi}_i^*$ — оператор перехода от системы координат звездного снимка к инерциальной системе координат. Компонентами вектора $\bar{\mathbf{r}}^0_{ij}$ в инерциальной системе координат являются направляющие косинусы L_{ij}, M_{ij} и N_{ij}, которые можно выразить через спутникоцентрические прямое восхождение α_{ij} и склонение δ_{ij} точки поверхности:

$$\bar{\mathbf{r}}^0_{ij} = \begin{pmatrix} L_{ij} \\ M_{ij} \\ N_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_{ij} & \cos\delta_{ij} \\ \sin\alpha_{ij} & \cos\delta_{ij} \\ & \sin\delta_{ij} \end{pmatrix}. \tag{210}$$

В гринвичской системе координат спутникоцентрический вектор определяется выражением

$$\bar{\mathbf{R}}^0_{ij} = \mathbf{S}_i \mathbf{\Pi}_i^* \mathbf{\Pi}_0 \begin{pmatrix} \tilde{l}_j \\ \tilde{m}_j \\ \tilde{n}_j \end{pmatrix}, \tag{211}$$

где $\mathbf{S}_i$ — оператор перехода к гринвичской системе координат, определяемый по формуле (143).

Компонентами вектора $\bar{\mathbf{R}}^0_{ij}$ в гринвичской системе координат являются направляющие косинусы L^r_{ij}, M^r_{ij}, N^r_{ij}:

$$\bar{\mathbf{R}}^0_{ij} = \begin{pmatrix} L^r_{ij} \\ M^r_{ij} \\ N^r_{ij} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_{ij} - S_i)\cos\delta_{ij} \\ \sin(\alpha_{ij} - S_i)\cos\delta_{ij} \\ \sin\delta_{ij} \end{bmatrix}, \tag{212}$$

где S_i — звездное время в Гринвиче в момент фотографирования t_i, определяемое по формуле (144).

Спутникоцентрические координаты α_{ij} и δ_{ij} определяются формулами

$$\operatorname{tg}\alpha_{ij} = \frac{M_{ij}}{L_{ij}} = \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i}; \tag{213}$$

$$\operatorname{tg}\delta_{ij} = \frac{N_{ij}}{\sqrt{M^2_{ij} + L^2_{ij}}} = \frac{z_j - z_i}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}}.$$

где x_i, y_i, z_i — геоцентрические инерциальные координаты спутника; x_j, y_j, z_j — геоцентрические инерциальные координаты точки j.

При оценке точности определения спутникоцентрических направлений на точки поверхности планеты необходимо учитывать многочисленные источники ошибок. К их числу относятся следующие:

наличие случайных и систематических ошибок в измеренных координатах звезд и пунктов по снимкам;

метрическая нестабильность деформации светочувствительного слоя;

число и расположение на снимке опорных звезд, величины фокусных расстояний камер;

наличие ошибок координат исходных пунктов при определении оператора взаимной ориентации снимков $\mathbf{\Pi}_0$;

ошибки определения дисторсии объективов и элементов внутреннего ориентирования снимков;

ошибки определения операторов ориентирования камер $\mathbf{\Pi}_j$ и $\mathbf{\Pi}_0$;

внутренняя рефракция в приборном отсеке корабля;

наличие систематических и случайных ошибок в каталогах звезд.

Ошибку $m(\theta)$ определения направления $\bar{\mathbf{r}}^0_{ji}$ будем характеризовать значениями ее составляющих по прямому восхождению $m(\alpha_{ji}\cos\delta_{ji})$ и склонению $m(\delta_{ji})$, так что

$$m^2(\theta) = m^2(\alpha_{ji}\cos\delta_{ji}) + m^2(\delta_{ji}).$$

Представим эти составляющие в виде функции ошибок измерения координат на снимке (dx, dy), ошибок определения элементов внутреннего ориентирования (df_i, dx_0, dy_0) и ошибок определения

операторов Π_j и Π_0 $(d\Omega, d\omega, di, d\Omega_0, d\omega_0, di_0)$:

$$d(\alpha_{ji}\cos\delta_{ji}) = F(dx, dy, df_t, dx_0,$$

$$dy_0, df_t^*, d\Omega, d\omega, di, d\Omega_0, d\omega_0, di_0).$$

Тогда тензор ошибок спутникоцентрического направления $M^2(\bar{r}^0_{jl})$ будет иметь вид

$$M^2(\bar{r}^0_{jl}) = FM^2F^T, \tag{214}$$

где

$$M^2 = \begin{bmatrix} M^2(x, y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M^2(f_t, x_0, y_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_*^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_0 \end{bmatrix}. \tag{215}$$

Элементами тензора (215) являются: $M^2(x, y)$ — тензор ошибок измеренных координат точек на топографическом снимке; $M^2(f_t, x_0, y_0)$ — тензор ошибок элементов внутреннего ориентирования топографической камеры; M_*^2 — тензор ошибок эйлеровых углов оператора ориентации звездной камеры; M_0^2 — тензор ошибок эйлеровых углов оператора взаимной ориентации камер.

В результате численного моделирования установлено, что увеличение фокусных расстояний повышает точность определения r^0_{jl}. Однако при выбранном фокусном растоянии топографической камеры f_t увеличение фокусного расстояния f^* звездной камеры практически не приводит к повышению точности определения спутникоцентрического направления.

Увеличение расстояния Δ до звезды от главной точки снимка приводит к повышению точности при использовании короткофокусных систем и практически не влияет на точность при измерениях с помощью длиннофокусных систем.

При определении оператора Π_0 взаимной ориентации снимков оптимально использовать не более 10—13 синхронных пар снимков. Дальнейшее увеличение числа пар не приводит к существенному повышению точности, поскольку вызывает накопление систематических ошибок элементов внутреннего ориентирования.

Можно утверждать, что при тщательном соблюдении технологии обработки снимков для систем с f_t=200 мм и f^*=250 мм ($m(x)=m(y)$=0,005 мм), ошибки определения спутникоцентрических направлений $m(\bar{r}^0_{jl})$ не превосходит 10—15″. При высоте орбиты 250 км это соответствует линейным ошибкам в положении пунктов на поверхности Земли порядка 20—25 м.

Ошибки определения спутникоцентрического направления, обусловленные ошибками измерения координат точек топографического снимка $\tilde{x}_j$ и $\tilde{y}_j$ и ошибкой в фокусном расстоянии камеры. Продифференцировав выражения (213), получим

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha_{ij}} d\alpha_{ij} = \frac{L_{ij}dM_{ij} - M_{ij}dL_{ij}}{L_{ij}^2} = \frac{\cos \alpha_{ij} \cos \delta_{ij} dM_{ij} - \sin \alpha_{ij} \cos \alpha_{ij} dL_{ij}}{\cos^2 \alpha_{ij} \cos^2 \delta_{ij}},$$

откуда

$$d\alpha_{ij} = -\frac{1}{\cos \delta_{ij}} (\sin \alpha_{ij} dL_{ij} - \cos \alpha_{ij} dM_{ij}). \quad (216)$$

Точно так же находим

$$\frac{1}{\cos^2 \delta_{ij}} d\delta_{ij} = \frac{q_{ij}dN_{ij} - N_{ij}dq_{ij}}{q_{ij}^2}, \quad (217)$$

где

$$q_{ij}^2 = L_{ij}^2 + M_{ij}^2 = \cos^2 \delta_{ij}.$$

Преобразовав формулу (217), получим

$$q_{ij}dq_{ij} = -\cos \delta_{ij} \sin \delta_{ij} d\delta_{ij};$$

$$dqi_j = -\operatorname{tg} \delta_{ij} d\delta_{ij},$$

поэтому

$$d\delta_{ij} = -N_{ij} \sin \delta_{ij}\, d\delta_{ij} - \cos \delta_{ij} dN_{ij},$$

$$\text{т. е. } d\delta_{ij} = \frac{1}{\cos \delta_{ij}} dN_{ij}. \quad (218)$$

Дифференциал спутникоцентрического направления $d\theta_{ij}$ запишем в следующей форме:

$$d\theta_{ij} = d\delta_{ij} + \cos \delta_{ij} d\alpha_{ij}, \quad (219)$$

где $d\delta_{ij}$ и $d\alpha_{ij}$ — дифференциалы координатных линий α_{ij}=const и δ_{ij}=const на спутникоцентрической сфере единичного радиуса. С учетом формул (216) и (218) выразим дифференциал $d\theta_{ij}$ спутникоцентрического направления в виде

$$d\theta_{ij} = \sec \delta_{ij} dN_{ij} - \sin \alpha_{ij} dL_{ij} + \cos \alpha_{ij} dM_{ij}. \quad (220)$$

Среднюю квадратическую ошибку $m''(\theta_{ij})$ определения спутникоцентрического направления, выраженную в секундах дуги, на основании формулы (220) представим следующим образом:

$$m''(\theta_{ij}) = \rho'' \sqrt{\sec^2 \delta_{ij} m''^2_{N_{ij}} + \sin^2 \alpha_{ij} m''^2_{L_{ij}} + \cos^2 \alpha_{ij} m''^2_{(M_{ij})}}, \quad (221)$$

где $m''^2_{N_{ij}}$, $m''^2_{L_{ij}}$ и $m''^2_{M_{ij}}$ — средние квадратические ошибки направляющих косинусов; ρ=206 265″.

Выразим dL_{ij}, dM_{ij} и dN_{ij} в виде функций дифференциалов $d\tilde{x}_{ij}$, $d\tilde{y}_{ij}$ координат точек снимка и дифференциала df_t фокусного расстояния камеры. На основании формул (181) и (182) получим

$$\begin{pmatrix} L_{ij} \\ M_{ij} \\ N_{ij} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_{ij}} \Pi_i^{\tau} \begin{pmatrix} \tilde{x}_{ij} \\ \tilde{y}_{ij} \\ -f_t \end{pmatrix}, \tag{222}$$

где

$$\Delta_{ij} = \tilde{x}_{ij}^2 + \tilde{y}_{ij}^2 + f_t^2.$$

Продифференцируем вектор

$$\begin{pmatrix} \tilde{l}_{ij} \\ \tilde{m}_{ij} \\ \tilde{n}_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\tilde{x}_{ij}}{\sqrt{\tilde{x}_{ij}^2 + \tilde{y}_{ij}^2 + f_t^2}} \\ \dfrac{\tilde{y}_{ij}}{\sqrt{\tilde{x}_{ij}^2 + \tilde{y}_{ij}^2 + f_t^2}} \\ \dfrac{-f_t}{\sqrt{\tilde{x}_{ij}^2 + \tilde{y}_{ij}^2 + f_t^2}} \end{pmatrix} \tag{223}$$

по координатам $\tilde{x}_{ij}$, $\tilde{y}_{ij}$ и фокусному расстоянию f_t. В результате получим матрицу, устанавливающую связь между дифференциалами направляющих косинусов в системе координат снимка и дифференциалами координат $d\tilde{x}_{ij}$, $\tilde{y}_{ij}$, df_t:

$$\begin{pmatrix} d\tilde{l}_{ij} \\ d\tilde{m}_{ij} \\ d\tilde{n}_{ij} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_{ij}} \begin{pmatrix} 1-\tilde{l}_{ij}^2 & -\tilde{m}_{ij}\tilde{l}_{ij} & -\tilde{l}_{ij}\tilde{n}_{ij} \\ -\tilde{m}_{ij}\tilde{l}_{ij} & 1-\tilde{m}_{ij}^2 & -\tilde{m}_{ij}\tilde{n}_{ij} \\ -\tilde{l}_{ij}\tilde{n}_{ij} & -\tilde{m}_{ij}\tilde{n}_{ij} & 1-\tilde{n}_{ij}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\tilde{x}_{ij} \\ d\tilde{y}_{ij} \\ -df_t \end{pmatrix}. \tag{224}$$

Продифференцировав выражение (222) с учетом формулы (224), получим соотношение для дифференциалов направляющих косинусов dL_{ij}, dM_{ij} и dN_{ij} в инерциальной системе координат как функций дифференциалов $d\tilde{x}_{ij}$ и $d\tilde{y}_{ij}$ координат точек снимка и df_t фокусного расстояния:

$$\begin{pmatrix} dL_{ij} \\ dM_{ij} \\ dN_{ij} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_{ij}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\tilde{l}_{ij}^2 & -\tilde{m}_{ij}\tilde{l}_{ij} & -\tilde{l}_{ij}\tilde{n}_{ij} \\ -\tilde{m}_{ij}\tilde{l}_{ij} & 1-\tilde{m}_{ij}^2 & -\tilde{m}_{ij}\tilde{n}_{ij} \\ -\tilde{l}_{ij}\tilde{n}_{ij} & -\tilde{m}_{ij}\tilde{n}_{ij} & 1-\tilde{n}_{ij}^2 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} d\tilde{x}_{ij} \\ d\tilde{y}_{ij} \\ -df_t \end{pmatrix}.$$

Теперь можно составить сводку формул для априорной оценки точности определения спутникоцентрического направления $\bar{r}_{ij}^0$ в инерциальной системе координат в зависимости от средних квадратических ошибок измерения координат на снимке $m(\tilde{x}_{ij})$, $m(\tilde{y}_{ij})$ и фокусного расстояния $m(f_t)$.

Формулы средних квадратических ошибок $m(\tilde{l}_{ij})$, $m(\tilde{m}_{ij})$ и $m(\tilde{n}_{ij})$ направляющих косинусов в системе координат снимка:

$$m(\tilde{l}_{ij}) = \frac{1}{\Delta_{tj}} \sqrt{(1-\tilde{l}_{ij}^2)^2 m^2(\tilde{x}_{ij}) + (\tilde{m}_{ij}\tilde{l}_{ij})^2 m^2(\tilde{y}_{ij}) + \tilde{l}_{ij}\tilde{n}_{ij}^2 m^2(f_t)};$$

$$m(\tilde{m}_{ij}) = \frac{1}{\Delta_{tj}} \sqrt{(\tilde{m}_{ij}\tilde{l}_{ij})^2 m^2(\tilde{x}_{ij}) + (1-\tilde{m}_{ij}^2)^2 m^2(\tilde{y}_{ij}) + (\tilde{m}_{ij}\tilde{n}_{ij})^2 m^2(f_t)}; \quad (225)$$

$$m(\tilde{n}_{tj}) = \frac{1}{\Delta_{tj}} \sqrt{(\tilde{l}_{ij}\tilde{n}_{ij})^2 m^2(\tilde{x}_{ij}) + (\tilde{m}_{ij}\tilde{n}_{ij})^2 m^2(\tilde{y}_{tj}) + (1-\tilde{n}_{tj}^2)^2 m^2(f_t)}.$$

Формулы средних квадратических ошибок $m(L_{ij})$, $m(N_{ij})$, $m(M_{ij})$ направляющих косинусов в инерциальной системе координат:

$$m(L_{ij}) = \sqrt{a_{11}^2 m^2(l_{ij}) + a_2^2 m^2(\tilde{m}_{ij}) + a_3^2 m^2(\tilde{n}_{ij})};$$

$$m(M_{ij}) = \sqrt{a_{12}^2 m^2(\tilde{l}_{ij}) + a_{22}^2 m^2(\tilde{m}_{ij}) + a_{32}^2 m^2(\tilde{n}_{ij})}; \quad (226)$$

$$m(N_{ij}) = \sqrt{a_{13}^2 m^2(\tilde{l}_{ij}) + a_{23}^2 m^2(\tilde{m}_{ij}) + a_{33}^2 m^2(\tilde{n}_{ij})},$$

где элементы a_{ik} матрицы Π_i^T вычисляют по формулам (184).

Формулы средних квадратических ошибок $m''(\alpha_{ij})$ и $m''(\delta_{ij})$ спутникоцентрического прямого восхождения и склонения (в угл. с)

$$m''(\alpha_{ij}) = \frac{\rho''}{\cos\delta_{ij}} \sqrt{\sin^2\alpha_{ij} m^2(L_{ij}) + \cos^2\alpha_{ij} m^2(N_{ij})}; \quad (227)$$

$$m''(\delta_{ij}) = \frac{\rho''}{\cos\delta_{ij}} m^2(N_{ij}), \quad (228)$$

где $\rho'' = 206\,265''$.

Формула средней квадратической ошибки спутникоцентрического направления $m''(\theta_{ij})$:

$$m''(\theta_{ij}) = \sqrt{m'^{2}(\delta_{ij}) + \cos^2\delta_{ij} m''^{2}(\alpha_{ij})}. \qquad (229)$$

Ошибки спутникоцентрического направления $\bar{\mathbf{r}}^0_{ij}$ в инерциальном пространстве, обусловленные ошибками угловой ориентации топографического снимка. Пусть эйлеровы углы Ω'_i, ω'_i и J'_i, определяющие матрицу $\mathbf{\Pi}_i = (\mathbf{\Pi}_i * \mathbf{\Pi}_0)^{\mathrm{T}}$, получили малые приращения $d\Omega'_i$, $d\omega'_i$ и dJ'_i. Определим малые приращения координат точек топографического снимка $d\tilde{x}_{ij}$ и $d\tilde{y}_{ij}$, обусловленные наличием $d\Omega'_i$, $d\omega'_i$ и dJ'_i.

На основании формул (187) и (188) будем иметь

$$\begin{bmatrix} d\tilde{x}_{ij} \\ d\tilde{y}_{ij} \end{bmatrix} = \underset{(2,3)}{\widehat{\mathbf{B}}^{(1)}_{ij}} \begin{bmatrix} d\Omega'_i \\ d\omega'_i \\ dJ'_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial \Omega'_i} & \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial \omega'_i} & \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial J'_i} \\ \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial \Omega'_i} & \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial \omega'_i} & \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial J'_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\Omega'_i \\ d\omega'_i \\ dJ'_i \end{bmatrix}. \qquad (230)$$

Далее на основании формул (198) и (230) определим ошибки $m'(\tilde{x}_{ij})$ и $m'(\tilde{y}_{ij})$, обусловленные средними квадратическими ошибками эйлеровых углов $m(\Omega)$, $m(\omega)$ и $m(J)$:

$$m'(x_{ij}) = \chi_{ij} \sqrt{\left(W_{ij}\frac{\partial U_{ij}}{\partial \Omega'_i} - U_{ij}\frac{\partial W_{ij}}{\partial \Omega'_i}\right)^2 m^2(\Omega) + \left(W_{ij}\frac{\partial U_{ij}}{\partial \omega'_i} - U_{ij}\frac{\partial W_{ij}}{\partial \omega'_i}\right)^2 m^2(\omega) + \left(W_{ij}\frac{\partial U_{ij}}{\partial J'_i} - U_{ij}\frac{\partial W_{ij}}{\partial J'_i}\right)^2 m^2(J)};$$

$$m'(y_{ij}) = \chi_{ij} \sqrt{\left(W_{ij}\frac{\partial V_{ij}}{\partial \Omega'_i} - V_{ij}\frac{\partial W_{ij}}{\partial \Omega'_i}\right)^2 m^2(\Omega) + \left(W_{ij}\frac{\partial V_{ij}}{\partial \omega'_i} - V_{ij}\frac{\partial W_{ij}}{\partial \omega'_i}\right)^2 m^2(\omega) + \left(W_{ij}\frac{\partial V_{ij}}{\partial J'_i} - V_{ij}\frac{\partial W_{ij}}{\partial J'_i}\right)^2 m^2(J)}. \qquad (231)$$

Средние квадратические ошибки $m(\Omega)$, $m(\omega)$ и $m(J)$ в формулах (231) выражены в радианах, частные производные вычисляются по формулам (195)—(197).

Практически вычисление априорных значений средних квадратических ошибок $m(\alpha_{ij})$ и $m(\delta_{ij})$ удобно выполнять в следующем порядке:

по формулам (231) вычисляют средние квадратические ошибки $m'(\tilde{x}_{ij})$ и $m'(\tilde{y}_{ij})$, обусловленные ошибками внешнего ориентирования снимков $m(\Omega)$, $m(\omega)$, $m(J)$;

располагая априорными значениями $m''(\tilde{x}_{ij})$ и $m''(\tilde{y}_{ij})$ измеренных координат на снимке, определяют средние квадратические ошибки точек снимка $m(\tilde{x}_{ij})$ и $m(\tilde{y}_{ij})$ как результаты совместного действия ошибок углового ориентирования и ошибок измерений координат на снимках:

$$m(\tilde{x}_{ij}) = \sqrt{m'^2(x_{ij}) + m''^2(x_{ij})}; \quad m(\tilde{y}_{ij}) = \sqrt{m'^2(y_{ij}) + m''^2(x_{ij})}. \tag{232}$$

Далее по формулам (225)—(229) вычисляем средние квадратические ошибки определения спутникоцентрического направления, обусловленные ошибками измерения координат снимка, фокусного расстояния и внешней угловой ориентации снимка.

Пример 9. В качестве исходных данных примем числовые значения величин из примера 7.

Определить средние квадратические ошибки $m(\alpha_{ij})$ и $m(\delta_{ij})$, а также ошибку $m(\Theta_{ij})$ спутникоцентрического направления в инерциальном пространстве, если $m''(\tilde{x}_{ij}) = m''(\tilde{y}_{ij}) = 0{,}005$ мм; $m(f_t) = 0{,}003$ мм; $m(J_t') = m(\omega_t') = m(\Omega_t') = 10'' = 4{,}85 \cdot 10^{-5}$ рад.

Решение 1. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial \Omega_t'} = 24{,}0 \text{ мм}; \quad \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial \omega_t'} = -86{,}6 \text{ мм}; \quad \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial J_t'} = -63{,}0 \text{ мм};$$

$$\frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial \Omega_t'} = -139{,}7 \text{ мм}; \quad \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial \omega_t'} = -34{,}4 \text{ мм}; \quad \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial J_t'} = -95{,}19 \text{ мм}.$$

2. По формулам (231) определим:

$$m'(x_{ij}) = \sqrt{\left(\frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial \Omega_t'}\right)^2 m^2(\Omega_t') + \left(\frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial \omega_t'}\right)^2 m^2(\omega_t') + \left(\frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial J_t'}\right)^2 m^2(J_t')} = 0{,}005 \text{ мм};$$

$$m'(y_{ij}) = \sqrt{\left(\frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial \Omega_t'}\right)^2 m^2(\Omega_t') + \left(\frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial \omega_t'}\right)^2 m^2(\omega_t') + \left(\frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial J_t'}\right)^2 m^2(J_t')} = 0{,}008 \text{ мм}.$$

3. По формулам (232) вычислим:

$m(\tilde{x}_{ij}) = 0{,}007$ мм; $m(\tilde{y}_{ij}) = 0{,}009$ мм, т. е. $m(\tilde{x}_{ij}) \approx m(\tilde{y}_{ij}) \approx 0{,}008$ мм.

4. Затем определим Δ_{ij}, $\tilde{l}_{ij}$, $\tilde{m}_{ij}$ и $\tilde{n}_{ij}$:

$$\Delta_{ij} = \sqrt{\tilde{x}_{ij}^2 + \tilde{y}_{ij}^2 + f^2} = 136{,}7 \text{ мм}; \quad \tilde{l}_{ij} = \tilde{x}_{ij}/\Delta_{ij} = 0{,}252;$$

$$\tilde{m}_{ij} = \tilde{y}_{ij}/\Delta_{ij} = -0{,}633; \quad \tilde{n}_{ij} = -0{,}732.$$

5. В соответствии с формулами (225) получим ошибки направляющих косинусов $m(\tilde{l}_{ij})$, $m(\tilde{m}_{ij})$, $m(\tilde{n}_{ij})$ в системе координат снимка: $m(\tilde{l}_{ij}) = 5{,}75 \cdot 10^{-5}$; $m(\tilde{m}_{ij}) = 3{,}76 \cdot 10^{-5}$; $m(\tilde{n}_{ij}) = 3{,}09 \cdot 10^{-5}$.

6. По формулам (226) вычислим средние квадратические ошибки направляющих косинусов $m(L_{ij})$, $m(M_{ij})$, $m(N_{ij})$ в инерциальной системе координат и по формулам (227) и (228) $m(\alpha_{ij})$ и $m(\delta_{ij})$:

$$\alpha_{ij}=66{,}328^\circ;\ \delta_{ij}=-39{,}422^\circ;$$

$$m(L_{ij})=3{,}92\cdot10^{-5};\ m(M_{ij})=3{,}91\cdot10^{-5};\ m(N_{ij})=4{,}32\cdot10^{-5};$$

$$m(\alpha_{ij})=5{,}07\cdot10^{-5}=10{,}5'';\ m(\delta_{ij})=4{,}32\cdot10^{-5}=8{,}9''.$$

7. Определим ошибку $m(\theta_{ij})$ спутникоцентрического направления, обусловленную ошибками измерения координат снимка, фокусного расстояния и внешней ориентации снимка. Следовательно, в данном примере $m(\theta_{ij})=12''$.

При высоте орбиты $h_{II}\approx350$ км этой ошибке будет соответствовать линейная ошибка на местности, равная 20 м.

§ 16. РЕДУКЦИЯ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ КООРДИНАТ ЗВЕЗД НА МОМЕНТЫ ФОТОГРАФИРОВАНИЯ

Как сказано выше, каталоги звездных положений для каждой звезды содержат координаты α_0 и δ_0, отнесенные к среднему положению точки весеннего равноденствия на эпоху T_0 каталога, а также собственные движения μ_α и μ_δ по прямому восхождению и склонению. Инерциальные координаты звезд, изобразившихся на звездном снимке, отнесенные к истинной точке весеннего равноденствия эпохи фотографирования t_i, искажены за счет аберрации. Таким образом, возникает задача вычисления истинных координат звезд на момент фотографирования, в которые необходимо ввести поправки за действие аберрации. После этого получим видимые координаты звезд, которым соответствуют измеренные на астронегативе прямоугольные координаты звезд x^* и y^*.

В случае съемки звездного неба с борта ИСЗ различают годичную и орбитальную аберрации.

Годичная аберрация возникает вследствие орбитального движения Земли (и спутника) вокруг Солнца. Этот эффект, как известно из курса астрономии, всегда учитывается и при наземных наблюдениях звезд.

Орбитальная аберрация возникает только при наблюдениях звезд с борта ИСЗ и является следствием движения ИСЗ по своей орбите вокруг Земли.

Вычисление видимых мест звезд при обработке снимков звездного неба, полученных с борта ИСЗ, выполняется в следующей последовательности.

Опознавание звезд на астронегативе и определение номера звезды по каталогу.

Определение по номеру звезды координат α_0 и δ_0, отнесенных к средней точке весеннего равноденствия эпохи каталога T_0, и собственных движений μ_α и μ_δ.

В результате учета собственного движения и прецессии за время t_i-T_0 ось ox инерциальной системы координат будет направ-

лена в среднюю точку весеннего равноденствия эпохи фотографирования t_i.

В результате учета нутации ось *ox* будет направлена в истинную точку весеннего равноденствия эпохи фотографирования.

В результате учета действия годичной и орбитальной аберраций получают видимые координаты $\alpha_{вид}$ и $\delta_{вид}$ на эпоху фотографирования.

Вычисление видимых мест звезд

I. *Учет собственных движений и прецессии.* Пусть из каталога, составленного для некоторой эпохи T_0, известны координаты α_0 и δ_0 звезды и ее собственные движения μ_α и μ_δ.

Собственные движения определяются по формулам

$$\alpha' = \alpha_0 + \mu_\alpha (t_i - T_0);$$
$$\delta' = \delta_0 + \mu_\delta (t_i - T_0), \tag{233}$$

где t_i — эпоха фотографирования.

Затем вычисляют единичный вектор $\bar{r}^{0\prime}$ направления на звезду, компоненты которого исправлены за действие прецессии:

$$\bar{r}^{0\prime} = \begin{pmatrix} l' \\ m' \\ n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha' \cos\delta' \\ \sin\alpha' \cos\delta' \\ \sin\delta' \end{pmatrix}. \tag{234}$$

Для учета влияния прецессии на вектор $\bar{r}'^0$ необходимо подействовать ортогональной матрицей Π_{pr}, т. е.

$$\bar{r}''^0 = \Pi_{pr} \bar{r}'^0. \tag{235}$$

Элементы p_{ik} матрицы Π_{pr} можно выразить с помощью прецессионных параметров Ньюкома — Андуайе ζ, z и θ, являющихся эйлеровыми углами:

$$\begin{aligned}
p_{11} &= -\sin\zeta_0 \sin z + \cos\zeta_0 \cos z \cos\theta; \\
p_{12} &= -\cos\zeta_0 \sin z - \sin\zeta_0 \cos z \cos\theta; \\
p_{13} &= -\cos z \sin\theta; \\
p_{21} &= \sin\zeta_0 \cos z + \cos\zeta_0 \sin z \cos\theta; \\
p_{22} &= \cos\zeta_0 \cos z - \sin\zeta_0 \sin z \cos\theta; \\
p_{23} &= -\sin z \sin\theta; \\
p_{31} &= \cos\zeta_0 \sin\theta; \\
p_{32} &= -\sin\zeta_0 \sin\theta; \\
p_{33} &= \cos\theta.
\end{aligned} \tag{236}$$

Разложения в ряды прецессионных параметров ζ_0, z, θ для стандартной эпохи $T_0=1950{,}0$ имеют следующий вид:

$$\zeta_0=2304{,}952''T+0{,}3022''T^2+0{,}0180T^3;$$
$$z=2304{,}925''T+1{,}0951''T^2+0{,}0183''T^3; \qquad (237)$$
$$\theta=2004{,}257''T-0{,}4268''T^2-0{,}0418''T^3,$$

аргументом в этих формулах является величина

$$T=\frac{JD(t_i)-JD(1950.0)}{36\,524{,}22}, \qquad (238)$$

где $JD(t_i)$ и $JD(1950{,}0)$ — моменты времени, соответствующие времени фотографирования t_i и стандартной эпохе 1950,0, выражены в юлианских днях JD. Эпохе 1950,0 соответствует $JD(1950{,}0)=2\,433\,282{,}4234$.

Для вычисления $JD(t_i)$ используют следующий алгоритм.

1. Ввести обозначения: y — номер года, m — номер месяца, d — число месяца.

2. Если $m=1$ или 2, то $y'=y-1$ и $m'=m+12$, если $m>2$, то $y'=y$ и $m'=m$.

3. Вычислить A — целую часть от $y'/100$ и $B=2-A+$целая часть от $A/4$.

4. Вычислить C — целую часть от $365{,}25\,y'$.

5. Вычислить D — целую часть от $30{,}6001\,(m'+1)$.

6. Найти $JD=1720\,994{,}5+B+C+D+d$.

II. *Учет нутации.* Для этого на вектор $\bar{r}^{0''}$ необходимо подействовать матрицей нутации Π_{nut}:

$$\bar{r}^{0'''}=\begin{pmatrix} l''' \\ m''' \\ n''' \end{pmatrix}=\Pi_{nut}\,\bar{r}^{0'''}=\Pi_{nut}\,\Pi_{pr}\bar{r}^{0'}. \qquad (239)$$

Нутация никогда не превосходит 10^{-4}, поэтому элементы матрицы нутации раскладывают в ряд Тейлора и ограничиваются линейными членами.

При этом матрица нутации Π_{nut} имеет следующий вид:

$$\Pi_{nut}=\begin{bmatrix} 1 & -\Delta\psi\cos\varepsilon & -\Delta\psi\sin\varepsilon \\ \Delta\psi\cos\varepsilon & 1 & -\Delta\varepsilon \\ \Delta\psi\sin\varepsilon & \Delta\varepsilon & 1 \end{bmatrix}. \qquad (240)$$

В этом выражении $\Delta\psi$ — нутация по долготе, которая изменяет положение точки весеннего равноденствия; $\Delta\varepsilon$ — нутация в наклоне, изменяющая наклон эклиптики к экватору; ε — наклон эклиптики к экватору.

Компоненты нутации $\Delta\psi$ и $\Delta\varepsilon$ представляют в виде тригонометрических рядов, аргументами которых являются фундаментальные аргументы теории движения Луны и Солнца:

средняя долгота восходящего узла Луны Ω;
средняя аномалия Луны l;
средняя аномалия Солнца l';
средний аргумент широты Луны F;
средняя элонгация Луны от Солнца D.

Эти величины задаются разложениями Брауна. Так,

$$\Omega = 259°10'59{,}79'' - 1934°08'31{,}23''T' + 7{,}48''T'^2 + 0{,}0080''T'^3;$$

$$l = 296°06'16{,}59'' + 477\,198°50'56{,}79''T' + 33{,}09''T'^2 + 0{,}0518''T'^3;$$

$$l' = 358°28'33{,}00'' + 35\,999°02'59{,}10''T' - 0{,}54''T'^2 - 0{,}0120''T'^3;$$

$$F = 11°15'03{,}20'' + 483\,202°01'30{,}54''T' - 11{,}56''T'^2 - 0{,}0012''T'^3;$$

$$D = 350°44'14{,}95'' + 445\,267°06'51{,}18''T' - 5{,}17''T'^2 + 0{,}0068''T'^3. \quad (241)$$

Аргумент T' в формулах (241) определяется по формуле

$$T' = \frac{JD(t) - 2\,415\,020{,}0}{36\,525}, \quad (242)$$

где $JD(t)$ — юлианская дата эпохи фотографирования t_i.

Наклон эклиптики к плоскости экватора вычисляют с помощью разложения

$$\varepsilon = 23{,}452\,294\,4° - 0{,}130\,125\,00°\cdot 10^{-1}T' - 0{,}163\,888\,89°\cdot 10^{-5}T'^2 + 0{,}502\,777\,78°\cdot 10^{-6}T'^3. \quad (243)$$

Если пренебречь членами разложения, суммарное влияние которых приводит к погрешностям менее 0,05″, то составляющие нутации по долготе и в наклоне будут вычисляться по следующим формулам:

$$\Delta\psi = -17{,}2327''\sin\Omega - 1{,}2729''\sin 2(\Omega + F - D) + 0{,}2088''\sin 2\Omega + 0{,}1261\sin l' - 0{,}0497''\sin(2\Omega + l' + 2F - 2D) + 0{,}0214''\sin(2\Omega - l' + 2F - 2D) + 0{,}0016''\sin 2l' - 0{,}0015''\sin 2(\Omega + l' + F - D) + 0{,}0045''\sin(\Omega - 2l + 2F) - 0{,}2037''\sin 2(\Omega + F) + 0{,}0675\sin l - 0{,}0342''\sin(\Omega + 2F) - 0{,}261''\sin(2\Omega + l + 2F) - 0{,}0149''\sin(l - 2D); \quad (244)$$

$$\Delta\varepsilon = +9{,}2100''\cos\Omega + 0{,}5522''\cos 2(\Omega + F - D) - 0{,}0904''\cos 2\Omega + 0{,}0216''\cos(2\Omega + l' + 2F - 2D) - 0{,}0093''\cos(2\Omega - l' + 2F - 2D) - 0{,}0066''\cos(\Omega + 2F - 2D) + 0{,}0884''\cos 2(\Omega + F) + 0{,}0183''\cos(\Omega + 2F) + 0{,}0113''\cos(2\Omega + l + 2F). \quad (245)$$

III. *Учет годичной аберрации.* После учета прецессии и нутации получим истинные координаты $\alpha_{ист}$ и $\delta_{ист}$:

$$\operatorname{tg}\alpha_{ист}=\frac{m''}{l'''};\quad \operatorname{tg}\delta_{ист}=\frac{n'''^2}{\sqrt{l'''^2+m'''^2}}. \tag{246}$$

Истинные координаты необходимо исправить поправками $\Delta\alpha_г$ и $\Delta\delta_г$ за годичную аберрацию, которые вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
&\Delta\alpha_г = Cc + Dd';\quad \Delta\delta_г = Cc' + Dd';\\
&c=\frac{1}{15}\cos\alpha\sec\delta;\quad c'=\operatorname{tg}\varepsilon\cos\delta-\sin\alpha\sin\delta;\\
&d=\frac{1}{15}\sin\alpha\sec\delta;\quad d'=\cos\alpha\sin\delta;\\
&C=-20{,}496''\cos L_\odot\cos\varepsilon;\quad D=-20{,}496''\sin L_\odot,
\end{aligned} \tag{247}$$

где $L_\odot$ — средняя долгота Солнца, разложение которой имеет вид

$$L_\odot=279{,}696\,6778^\circ+36\,000{,}768\,925^\circ\,T'+0{,}302\,5000^\circ\cdot10^{-3}\,T'^2. \tag{248}$$

IV. *Учет орбитальной аберрации.* Орбитальная аберрация вызывает видимое изменение направления луча света от звезды, что обусловлено конечной скоростью света и движением ИСЗ по орбите. Орбитальная аберрация возникает только при фотографировании звездного неба с борта ИСЗ.

Поправки за орбитальную аберрацию $\Delta\alpha_0$ и $\Delta\delta_0$ можно вычислить следующим образом:

$$\begin{vmatrix}\Delta\alpha_0\\ \Delta\delta_0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\sec\delta\sin\alpha & \sec\delta\cos\alpha & 0\\ -\sin\delta\cos\alpha & -\sin\delta\sin\alpha & \cos\delta\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\frac{\dot x}{c}\\ \frac{\dot y}{c}\\ \frac{\dot z}{c}\end{vmatrix}, \tag{249}$$

где α и δ — координаты звезды; $\dot x$, $\dot y$, $\dot z$ — составляющие скорости ИСЗ по осям инерциальной системы координат; c — скорость света.

Поскольку эксцентриситет e орбит ИСЗ, используемых для картографических целей, весьма мал, будем считать, что орбита круговая, т. е. $e=0$. В этом случае орбита характеризуется четырьмя элементами: радиусом R, средней аномалией M, наклоном i и долготой восходящего узла Ω.

Составляющие скорости ИСЗ в круговом движении определяются выражениями:

$$\begin{aligned}
&\dot x = Rn(-\sin M\cos\Omega-\cos M\sin\Omega\cos i);\\
&\dot y = Rn(-\sin M\sin\Omega+\cos M\cos\Omega\cos i);\\
&\dot z = Rn\cos M\sin i.
\end{aligned} \tag{250}$$

В формулах (250): $n=\frac{360^\circ}{T^{(s)}}$ – среднее движение ИСЗ; $T^{(s)}=2\pi\sqrt{\frac{R^3}{\mu}}$ – период обращения ИСЗ в секундах; $\mu=398\,600{,}5\cdot10^9$ м^3/с^2 – геоцентрическая гравитационная постоянная; $M=M_0+\frac{(t_i-t_0)}{T^{(s)}}360^\circ$ – средняя аномалия в момент фотографирования t_i; M_0 – средняя аномалия в начальную эпоху t_0.

§ 17. ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПЕРАТОРА ОРИЕНТАЦИИ ЗВЕЗДНОГО СНИМКА В ИНЕРЦИАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Для определения трех эйлеровых углов, задающих ортогональную матрицу Π_i^*, в принципе достаточно знать инерциальные координаты α и δ двух звезд.

Положим, что из редукционных вычислений получены видимые инерциальные координаты двух звезд, а также измерены координаты $\bar{x}$, $\bar{y}$ этих же звезд в системе координат звездного снимка. Фокусное расстояние f^* звездной камеры известно, так же как и координаты $\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$ главной точки снимка. Полагая $\bar{x}_0=\bar{y}_0=0$, рассмотрим прямой метод определения ориентации звездного снимка в инерциальном пространстве. В данном случае требуется определить элементы ортогональной матрицы Π_i^*, которая удовлетворяет равенству

$$\begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix}=\Pi_i^*\begin{pmatrix} l^* \\ m^* \\ n^* \end{pmatrix} \tag{251}$$

или

$$\bar{\mathbf{R}}^0=\Pi^*\bar{\mathbf{r}}^0,$$

где l^*, m^*, n^* – направляющие косинусы звезды в системе координат снимка; L, M, N – направляющие косинусы этой же звезды в инерциальной системе координат.

При этом

$$\begin{aligned} l&=\frac{\tilde{x}}{\Delta}; \qquad L=\cos\alpha\cos\delta; \quad \Delta=\sqrt{\tilde{x}^2+\tilde{y}^2+f^{*2}};\\ m&=\frac{\tilde{y}}{\Delta}; \qquad M=\sin\alpha\cos\delta; \\ n&=-\frac{f^*}{\Delta}; \quad N=\sin\delta. \end{aligned} \tag{252}$$

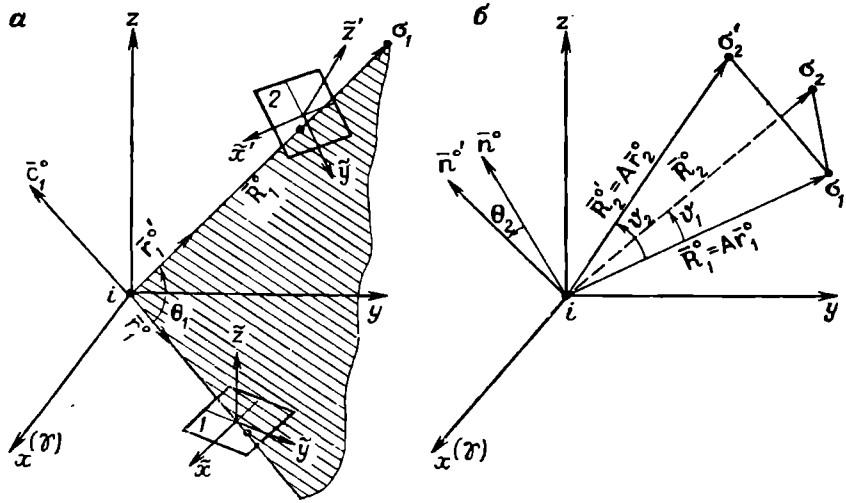

Рис. 15. Схема поворотов системы координат снимка:
а — на угол Θ_1; *б* — на угол Θ_2

Зафиксируем положение *1* звездного снимка относительно инерциальной системы координат *jxyz*, которое он занимал в момент съемки t_i (рис. 15,*а*). При этом $\bar{\mathbf{R}}_1^0$ — направление на первую звезду σ_1 в инерциальном пространстве, $\bar{\mathbf{r}}_1^0$ — направление на первую звезду в системе координат снимка.

Повернем систему координат снимка *ixyz* вокруг оси $\bar{\mathbf{c}}_1^0$ так, чтобы направления $\bar{\mathbf{r}}_1^0$ и $\bar{\mathbf{R}}_1^0$ совпали, т. е. чтобы направления на первую звезду в пространстве изображения и в инерциальном пространстве стали коллинеарны.

Угол поворота пространства θ_1 определится из скалярного произведения векторов $\bar{\mathbf{r}}_1^0$ и $\bar{\mathbf{R}}_1^0$:

$$\theta_1 = \arccos(\bar{r}_1^0 \bar{\mathbf{R}}_1^0) \tag{253}$$

или в координатной форме:

$$\theta_1 = \arccos(l_1 L_1 + m_1 M_1 + n_1 N_1). \tag{254}$$

Направление оси вращения $\bar{\mathbf{c}}_1^0$ представим в виде векторного произведения векторов $\bar{\mathbf{r}}_1^0$ и $\bar{\mathbf{R}}_1^0$:

$$\bar{\mathbf{c}}^0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin\theta_1} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}}_x & \bar{\mathbf{e}}_y & \mathbf{e}_z \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ L_1 & M_1 & N_1 \end{bmatrix}, \tag{255}$$

т. е.

$$c_1 = \frac{N_1 m_1 - M_1 n_1}{\sin\theta_1}; \quad c_2 = \frac{L_1 n_1 - N_1 l_1}{\sin\theta_1}; \quad c_3 = \frac{M_1 l_1 - L_1 m_1}{\sin\theta_1}, \tag{256}$$

причем

$$\sin\theta_1 = \sqrt{(N_1 m_1 - M_1 n_1)^2 + (L_1 n_1 - N_1 l_1)^2 + (M_1 l_1 - L_1 m_1)^2}. \tag{257}$$

Выполненному повороту θ_1 будет соответствовать матрица A, осуществляющая линейное преобразование,

$$\bar{\mathbf{R}}_1^0 = \mathbf{A}\bar{\mathbf{r}}_1^0. \tag{258}$$

Элементы матрицы **A** на основании теоретических положений, приведенных в главе I, можно выразить через параметры вращения, которыми являются направляющие косинусы c_1, c_2 и c_3 оси вращения и угол θ поворота пространства:

$$\mathbf{A} = \cos\theta_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (1 - \cos\theta_1) \begin{bmatrix} c_1^2 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ c_2 c_1 & c_2^2 & c_2 c_3 \\ c_3 c_1 & c_3 c_2 & c_3^2 \end{bmatrix} +$$

$$+ \sin\theta_1 \begin{bmatrix} 0 & -c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{259}$$

В результате выполненных преобразований система координат снимка $i\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ перешла в систему $i\bar{x}'\bar{y}'\bar{z}'$ (положение *2*), в которой направление на первую звезду σ_1 совпадает с направлением на эту звезду в инерциальной системе координат.

Теперь необходимо повернуть систему координат $i\bar{x}'\bar{y}'\bar{z}'$ до совмещения с инерциальной $ixyz$.

Осью вращения второго поворота будет вектор $\bar{\mathbf{R}}_1^0 = \mathbf{A}\bar{\mathbf{r}}_1^0$. Для определения угла θ_2 второго поворота преобразуем вектор $\bar{\mathbf{r}}_2^0$ в промежуточной системе координат $i\bar{x}'\bar{y}'\bar{z}'$, для чего подействуем на него матрицей **A**:

$$\bar{\mathbf{R}}_2^{0'} = \mathbf{A}\,\bar{\mathbf{r}}_2^0. \tag{260}$$

При этом ось вращения $\bar{\mathbf{R}}_1^0 = \mathbf{A}\bar{\mathbf{r}}_1^0$ является линией пересечения плоскостей $i\sigma_2'\sigma_1$ и $i\sigma_2\sigma_1$, угол θ_2 между которыми равен углу между нормалями $\mathbf{n}^{0'}$ и $\mathbf{n}^0$ к этим плоскостям (рис. 15,*б*). Таким образом, угол поворота пространства θ_2 — это угол между нормалями к плоскостям $i\sigma_2'\sigma_1$ и $i\sigma_2\sigma_1$.

Нормаль к плоскости $i\sigma_2\sigma_1$ определяется как векторное произведение $\bar{\mathbf{R}}_1^0$ и $\bar{\mathbf{R}}_2^0$:

$$\begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{n}}^0 = \frac{1}{\sin\theta_1} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}}_x & \bar{\mathbf{e}}_y & \bar{\mathbf{e}}_z \\ L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \end{bmatrix}, \tag{261}$$

где угол ϑ_1 — угол между векторами $\bar{\mathbf{R}}_1^0$ и $\bar{\mathbf{R}}_2^0$, который вычисляется следующим образом:

$$\cos\vartheta_1 = (\bar{\mathbf{R}}_1^0\bar{\mathbf{R}}_2) = L_1L_2 + M_1M_2 + N_1N_2;$$

$$\sin\vartheta_1 = \sqrt{(M_1N_2 - M_2N_1)^2 + (L_2N_1 - L_1N_2)^2 + (L_1M_2 - L_2M_1)^2}. \quad (262)$$

Аналогично, нормаль к плоскости $j\sigma_2'\sigma_1$ представим в виде векторного произведения $\bar{\mathbf{R}}_1^0$ и $\bar{\mathbf{R}}_2^{0'}$:

$$\begin{pmatrix} L' \\ M' \\ N' \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{n}}^{0'} = \frac{1}{\sin\vartheta_2}\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}}_x & \bar{\mathbf{e}}_y & \bar{\mathbf{e}}_z \\ L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2' & M_2' & N_2' \end{bmatrix}, \quad (263)$$

где ϑ_2 — угол между векторами $\bar{\mathbf{R}}_1^0$ и $\bar{\mathbf{R}}^{0'}$, определяется из выражений:

$$\cos\vartheta_2 = (\bar{\mathbf{R}}_1^0\bar{\mathbf{R}}_2^{0'}) = L_1L_2' + M_1M_2' + N_1N_2';$$

$$\sin\vartheta_2 = \sqrt{(M_1N_2' - M_2'N_1)^2 + (L_2'N_1 - L_1N_2')^2 + (L_1M_2' - L_2M_1)^2}. \quad (264)$$

Наконец, угол θ_2 между нормалями $\bar{\mathbf{n}}^0$ и $\bar{\mathbf{n}}^{0'}$ найдем из векторного и скалярного произведений нормалей $\bar{\mathbf{n}}^0$ и $\bar{\mathbf{n}}^{0'}$:

$$\sin\theta_2 = \sqrt{(MN' - M'N)^2 + (L'N - N'L)^2 + (LM' - L'M)^2}; \quad (265)$$

$$\cos\theta_2 = LL' + MM' + NN', \quad (266)$$

где L, M, N и L', M', N' — направляющие косинусы нормалей $\bar{\mathbf{n}}^0$ и $\bar{\mathbf{n}}^{0'}$, определяемые формулами (261) и (263).

Таким образом, определены параметры поворота на угол θ_2, которыми являются направляющие косинусы L_1, M_1, N_1; ось вращения $\bar{\mathbf{R}}_1^0$ и угол поворота пространства θ_2.

Этому повороту будет соответствовать ортогональная матрица B, которую выразим через параметры вращения:

$$\mathbf{B} = \cos\theta_2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (1 - \cos\theta_2)\begin{bmatrix} L_1^2 & L_1M_1 & L_1N_1 \\ M_1L_1 & M_1^2 & M_1N_1 \\ M_1L_1 & N_1M_1 & N_1^2 \end{bmatrix} +$$

$$+ \sin\theta_2\begin{bmatrix} 0 & -N_1 & M_1 \\ N_1 & 0 & -L_1 \\ -M_1 & L_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (267)$$

Для определения оператора $\mathbf{\Pi}_j^*$ ориентации звездного снимка в инерциальной системе координат достаточно перемножить матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, соответствующие первому и второму вращениям,

$$\mathbf{\Pi}_j^* = \mathbf{BA}. \quad (268)$$

Пример 10. Звездной камерой с фокусным расстоянием $f^*=210{,}0032$ мм в процессе космической съемки был получен звездный снимок, на котором по специальному каталогу опознаны звезды № 70 341 и № 70 408. Инерциальные координаты этих звезд на момент съемки 17 августа 1985 г. $12^h\ 37^m$UT1 были следующими:

	α	δ
70 341(1)	$17^h09^m39{,}32^s$	$-60°19'07{,}02''$
70 408(2)	$17^h05^m41{,}45^s$	$-51°15'07{,}86''$

а координаты звезд, измеренные на астронегативе:

	$\bar{x}$, мм	$\bar{y}$, мм
70 341(1)	17,1418	38,2142
70 408(2)	28,1070	6,2317

Требуется вычислить оператор ориентации звездной камеры Π_i^* в момент съемки.

Решение.

I. Вычисление оператора Π^* с использованием методов теории вращений.

1. Нормируя векторы $\bar{r}_1^0$ и $\bar{r}_2^0$ звезд в системе координат астронегатива, получим направляющие косинусы l, m, n:

	$\bar{r}_1^0$	$\bar{r}_2^0$
l	$8{,}004\ 9877\cdot10^{-2}$	$1{,}326\ 0057\cdot10^{-1}$
m	$1{,}784\ 5512\cdot10^{-1}$	$2{,}939\ 9332\cdot10^{-1}$
n	$-9{,}806\ 8642\cdot10^{-1}$	$-9{,}907\ 3348\cdot10^{-1}$

2 Вычислим направляющие косинусы звезд L, M и N в инерциальной системе координат ($L=\cos\alpha\cos\delta$; $M=\sin\alpha\cos\delta$; $N=\sin\delta$):

	$\bar{R}_1^0$	$\bar{R}_2^0$
L	$-1{,}079\ 0282\cdot10^{-1}$	$-1{,}469\ 3277\cdot10^{-1}$
M	$-4{,}832\ 7716\cdot10^{-1}$	$-6{,}084\ 0278\cdot10^{-1}$
N	$-8{,}687\ 9246\cdot10^{-1}$	$-7{,}799\ 0832\cdot10^{-1}$

Далее требуется определить ортогональную матрицу, осуществляющую преобразование $\bar{R}^0=\Pi^*\bar{r}^0$.

3. Опишем первое вращение:

$$\theta_1=\arccos(l_1L_1+m_1M_1+n_1N_1)=40{,}787\,999°;$$

$$c_1=\frac{N_1m_1-M_1n_1}{\sin\theta_1}=-9.628\,354\,4\cdot10^{-1};$$

$$c_2=\frac{L_1n_1-N_1l_1}{\sin\theta_1}=2{,}684\,459\,8\cdot10^{-1};$$

$$c_3=\frac{M_1l_1-L_1m_1}{\sin\theta_1}=-2{,}974\,375\,8\cdot10^{-1};$$

$\sin\theta_1=6{,}352\,62\cdot10^{-1}$; $\cos\theta_1=7{,}571\,3208\cdot10^{-1}$;

$c_1^2=9{,}270\,5208\cdot10^{-1}$; $c_1c_2=-2{,}584\,693\cdot10^{-1}$; $c_1c_3=2{,}863\,8344\cdot10^{-2}$;

$c_2^2=7{,}206\ 3244\cdot10^{-2}$; $c_2c_3=-7{,}984\,5923\cdot10^{-2}$; $c_3^2=8{,}846\,9114\cdot10^{-4}$.

4. Вычислим элементы a_{ik} матрицы A, соответствующей первому вращению:

$a_{11}=\cos\theta_1+(1-\cos\theta_1)c_1^2$;

$a_{12}=(1-\cos\theta_1)c_1c_2-\sin\theta_1c_3$;

$a_{13}=(1-\cos\theta_1)c_1c_3+\sin\theta_1c_2$;

$a_{21}=(1-\cos\theta_1)c_2c_1+\sin\theta_1c_3$;

$a_{22}=\cos\theta_1+(1-\cos\theta_1)c_2^2$;

$a_{23}=(1-\cos\theta_1)c_2c_3-\sin\theta_1c_1$;

$a_{31}=(1-\cos\theta_1)c_1c_3-\sin\theta_1c_2$;

$a_{32}=(1-\cos\theta_1)c_2c_3+\sin\theta_1c_1$;

$a_{33}=\cos\theta_1+(1-\cos\theta_1)c_3^2$.

В результате вычислений получим:

$$A=\begin{bmatrix} 9{,}822\,836\cdot10^{-1} & -4{,}334\,3434\cdot10^{-2} & 1{,}823\,2099\cdot10^{-1} \\ -8{,}220\,4368\cdot10^{-2} & 7{,}746\,3393\cdot10^{-1} & 6{,}270\,4461\cdot10^{-1} \\ -1{,}684\,1023\cdot10^{-1} & -6{,}309\,2301\cdot10^{-1} & 7{,}573\,4694\cdot10^{-1} \end{bmatrix}.$$

5. Опишем второе вращение. Предварительно преобразуем вектор $\bar{r}_0^2$ второй звезды из системы координат снимка в вектор $\bar{R}_2^0$ промежуточной системы, т. е.

$$\bar{R}_2^{0'}=A\bar{r}_2^0=\begin{pmatrix} -5{,}165\,441\cdot10^{-2} \\ -6{,}093\,6072\cdot10^{-1} \\ -7{,}912\,0888\cdot10^{-1} \end{pmatrix}.$$

6. Вычислим направляющие косинусы нормалей $\bar{n}^0$ и $\bar{n}^{0'}$ к плоскостям $j\sigma_2\sigma_1$ и $j\sigma_2'\sigma_1$:

$\bar{n}^0=[\bar{R}_1^0\times\bar{R}_2^0]$ $\qquad$ $\bar{n}^{0'}=[\bar{R}_1^0\times\bar{R}_2^{0'}]$

$L=-9{,}606\,8914\cdot10^{-1}$; $L'=-9{,}313\,6689\cdot10^{-1}$;

$M=2{,}755\,4193\cdot10^{-1}$; $M'=-2{,}565\,1961\cdot10^{-1}$;

$N=-3{,}395\,7562\cdot10^{-2}$; $N'=2{,}583\,6686\cdot10^{-2}$;

$\vartheta=9{,}083\,277°$; $\vartheta'=9{,}083\,277°$.

Равенство $\vartheta=\vartheta'$ является контролем вычислений, поскольку угловое расстояние между звездами не зависит от преобразований координат.

7. Вычислим для контроля направляющие косинусы L_1, M_1, N_1 первой звезды в инерциальной системе координат и определим угол θ_2 второго поворота:

$L_1=1{,}079\,0279\cdot10^{-1}$;

$M_1=4{,}832\,7715\cdot10^{-1}$;

$N_1=8{,}687\,9246\cdot10^{-1}$;

$\theta_2=35{,}383\,106°$;

$\bar{R}_1^0=[\bar{n}^0\times\bar{n}^{0'}]$.

Сравнив полученный результат с исходными данными, убеждаемся, что знаки направляющих косинусов L_1, M_1, N_1 изменились на противоположные, поэтому в данном случае следует поменять местами векторы в векторном произведении $\bar{R}_1^0=[\bar{n}^{0'}\times\bar{n}^0]$.

8. Далее по формуле (267) вычислим элементы b_{ik} матрнты **B**, заменив θ_1 на θ_2 и c_1, c_2, c_3 на L_1, M_1, N_1. Матрица **B** примет вид

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 8,174\,4912\cdot 10^{-1} & 5,126\,979\cdot 10^{-1} & -2,625\,2233\cdot 10^{-1} \\ -4,934\,3466\cdot 10^{-1} & 8,584\,369\cdot 10^{-1} & 1,400\,3024\cdot 10^{-1} \\ 2,971\,5206\cdot 10^{-1} & 1,506\,9988\cdot 10^{-2} & 9,547\,1129\cdot 10^{-1} \end{bmatrix}.$$

9. Затем, перемножив матрицы **B** и **A**, получим оператор **П***. Он будет равен

$$\mathbf{П}^*=\mathbf{BA}=\begin{bmatrix} 8,050\,323\cdot 10^{-1} & 5,273\,5352\cdot 10^{-1} & 2,717\,021\cdot 10^{-1} \\ -5,788\,4255\cdot 10^{-1} & 5,980\,132\cdot 10^{-1} & 5,543\,6621\cdot 10^{-1} \\ 1,298\,6563\cdot 10^{-1} & -6,035\,5519\cdot 10^{-1} & 7,866\,7428\cdot 10^{-1} \end{bmatrix}.$$

II. Вычисление оператора **П*** с использованием алгебры кватернионов:

1. Первому повороту соответствует кватериион

$$\theta_1=(A_1+c_1\bar{e}_x+c_2\bar{e}_y+c_3\bar{e}_z),$$

где $A_1=\operatorname{ctg}\theta_1/2=+2,689\,7813$, а норма $N_1=\operatorname{cosec}\theta_1/2=2,869\,6556$.
При этом нормированный кватериион q_1 будет следующим:

$$q_1=9,373\,185\cdot 10^{-1}-3,355\,2299\cdot 10^{-1}\bar{e}_x+9,354\,641\cdot 10^{-2}\bar{e}_y-1,036\,4922\cdot 10^{-2}\bar{e}_z.$$

2. Второму вращению соответствует кватерниои

$$Q_2=(A_2+L_1\bar{e}_x+M_1\bar{e}_y+N_1\bar{e}_z),$$

где $A_2=\operatorname{ctg}\theta_2/2=-3,135\,0099$, а иорма $N_2=\operatorname{cosec}\theta_2/2=3,290\,6348$.
Тогда иормированиый кватернион q_2 имеет вид

$$q_2=-9,527\ 0631\cdot 10^{-1}+3,279\,0859\cdot 10^{-2}\bar{e}_x+1,468\,6435\cdot 10^{-1}\bar{e}_y+$$

$$+2,640\,196\cdot 10^{-1}\bar{e}_z.$$

Вычислим координаты второй звезды в инерциальной системе координат.

3. Выполним в соответствии с правилами кватериионного умножения, приведенными в главе I, первое преобразование:

$$\bar{\mathbf{R}}_2^{0'}=q_1\bar{\mathbf{r}}_2^0q_1^{-1}=\begin{pmatrix} -5,165\,436\,4\cdot 10^{-2} \\ -6,093\,607\,2\cdot 10^{-1} \\ -7,912\,088\,3\cdot 10^{-1} \end{pmatrix},$$

в результате получим вектор $\bar{\mathbf{R}}_2^{0'}$ второй звезды в промежуточной системе координат.

4. Умножив кватернионно этот вектор на кватернион q_2, найдем вектор второй звезды в иерциальной системе координат

$$\mathbf{R}_0^2=q\bar{\mathbf{R}}_2^{0'}q^{-1}=q_2q_1\bar{\mathbf{r}}_2^0q_1^{-1}q_2^{-1}=\begin{pmatrix} -1,469\,327\,8\cdot 10^{-1} \\ -6,084\,028\,3\cdot 10^{-1} \\ -7,799\,082\,8\cdot 10^{-1} \end{pmatrix}.$$

Сравнивая результат второго умножения с исходными данными, констатируем их совпадение.

5. Умножение q_2q_1 по правилу (97) определяет значение кватерниона q, осуществляющего ортогональное преобразование:

$$q=q_2q_1=-8,929\,927\cdot 10^{-1}+3,241\,7002\cdot 10^{-1}\bar{e}_x-3,970\,818\cdot 10^{-2}\bar{e}_y+$$

$$+3,096\,8909\cdot 10^{-1}\bar{e}_z.$$

6. Выразим элементы матрицы Π^* по формуле (103) через параметры кватерниона q:

$$\Pi^* = \begin{bmatrix} 8{,}050\,3809\cdot10^{-1} & 5{,}273\,558\cdot10^{-1} & 2{,}717\,0208\cdot10^{-1} \\ -5{,}788\,446\cdot10^{-1} & 5{,}980\,1917\cdot10^{-1} & 5{,}543\,6854\cdot10^{-1} \\ 1{,}298\,6562\cdot10^{-1} & -6{,}035\,573\cdot10^{-1} & 7{,}866\,8036\cdot10^{-1} \end{bmatrix}.$$

Сравнив этот результат с ранее полученными, убеждаемся в наличии небольших расхождений в значениях элементов, которые объясняются ошибками округления при вычислениях. Вследствие чего возникло нарушение ортогональности матрицы Π_1^*, полученной в результате кватернионного умножения. При этом ошибка ориентации звездного снимка составит порядка 2,5″.

§ 18. СОВМЕСТНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ОПЕРАТОРА ОРИЕНТАЦИИ ЗВЕЗДНОГО СНИМКА, ЭЛЕМЕНТОВ ВНУТРЕННЕГО ОРИЕНТИРОВАНИЯ И ПАРАМЕТРОВ ДИСТОРСИИ

Рассмотренное выше прямое решение задачи определения элементов матрицы Π^* является предварительным. Оно необходимо для ускорения сходимости итерационного ньютоновского процесса при решении более общей задачи совместного определения параметров ориентации снимка в инерциальном пространстве, координат главной точки снимка $\tilde{x}_0$ и $\tilde{y}_0$, фокусного расстояния камеры f^* и параметров дисторсии объектива.

Предположим, что определены приближенные значения эйлеровых углов Ω_0, ω_0, i_0, а из паспортных данных камеры известно приближенное значение f_0^* фокусного расстояния. Приближенные координаты $\tilde{x}_0^0$ и $\tilde{y}_0^0$ главной точки примем равными нулю.

Симметрическая составляющая Δr радиальной дисторсии может быть представлена в виде разложения в ряд расстояния от главной точки до изображения звезды по нечетным степеням, т. е.

$$\Delta r = k_1 r^3 + k_2 \bar{r}^5 + k_3 \bar{r}^7 + \ldots . \qquad (269)$$

Пусть на астронегативе измерены координаты n звезд, а инерциальные координаты этих же звезд определены по звездному каталогу и в результате редукционных вычислений.

Найдем такие поправки к эйлеровым углам, координатам главной точки, фокусному расстоянию и коэффициентам k_1, k_2 и k_3 в выражении (269) для дисторсии, которые удовлетворяют условию

$$\bar{\mathbf{V}}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\bar{\mathbf{V}} = \min, \qquad (270)$$

где $\mathbf{V}$ — вектор-столбец поправок к измеренным координатам x_j, y_j $(j=1, 2, \ldots, n)$ звезд, а $\mathbf{P}$ — весовая матрица измеренных координат звезд. По теории метода наименьших квадратов обобщенные оценки имеют максимальную точность, если в качестве весовой матрицы принять обратную ковариационную матрицу непосредственных измерений. Поэтому положим, что весовая матри-

ца P равна обратной ковариационной матрице непосредственных измерений $\mathbf{K}^{-1}$:

$$\mathbf{P}=\mathbf{K}^{-1}. \tag{271}$$

При этом ковариационная матрица $\mathbf{K}$ результатов измерений координат $\tilde{x}_j$ и $\tilde{y}_j$ j-й звезды на снимке будет иметь вид

$$\underset{(2,2)}{\mathbf{K}}=\begin{vmatrix} q_{xx} & q_{xy} \\ q_{xy} & q_{yy} \end{vmatrix}, \tag{272}$$

где q_{xx} и q_{yy} — дисперсии координат $\tilde{x}_j$ и $\tilde{y}_j$ j-й звезды; q_{xy} — ковариация координат $\tilde{x}_j$ и $\tilde{y}_j$.

Поскольку координаты разных звезд снимка между собой не коррелируют, то общая ковариационная матрица n звезд будет иметь диагональный вид:

$$\underset{(2n,2n)}{\mathbf{K}}=\operatorname{diag}(\underset{(2,2)}{\mathbf{K}_1}\,\underset{(2,2)}{\mathbf{K}_2}\,\ldots\,\underset{(2,2)}{\mathbf{K}_n}). \tag{273}$$

Уравнения коллинеарности при обработке звездного снимка. Уравнения связи координат звезды в инерциальной системе и в системе координат звездного снимка будут иметь вид

$$\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ -f^* \end{pmatrix}=\underset{(3,3)}{\mathbf{Q}}\begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix}, \tag{274}$$

где $\Delta=\sqrt{\tilde{x}^2+\tilde{y}^2+f^{*2}}$; L, M, N — направляющие косинусы звезды, причем

$$L=\cos\alpha\cos\delta;\ M=\sin\alpha\cos\delta;$$
$$N=\sin\delta; \tag{275}$$

$\mathbf{Q}$ — ортогональная матрица, равна $\Pi^{*\mathrm{T}}$:

$$\mathbf{Q}=\Pi^{*\mathrm{T}}. \tag{276}$$

Элементы матрицы $\mathbf{Q}$ зададим эйлеровыми углами Ω^*, ω^* и J^*.

Ω^* — угол, отсчитываемый в плоскости спутникоцентрического экватора от направления в точку весеннего равноденствия γ до линии $i\Omega^*$, пересечения плоскости экватора с плоскостью звездного снимка;

ω^* — угол, отсчитываемый в плоскости звездного снимка от линии $i\Omega^*$ до положительного направления оси x^* звездного снимка;

J^* — угол между осью z инерциальной системы координат и осью $\tilde{z}^*$ звездного снимка.

Тогда элементы матрицы

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{277}$$

определяются стандартными формулами:

$$\begin{aligned} &a_{11}=\cos\omega^*\cos\Omega^*- && a_{12}=\cos\omega^*\sin\Omega^*+ && a_{13}=\sin\omega^*\sin J^*;\\ &-\sin\omega^*\sin\Omega^*\cos J^*; && +\sin\omega^*\cos\Omega^*\cos J^*; && \\ &a_{21}=-\sin\omega^*\cos\Omega^*- && a_{22}=-\sin\omega^*\sin\Omega^*+ && a_{23}=\cos\omega^*\sin J^*\\ &-\cos\omega^*\sin\Omega^*\cos J^*; && +\cos\omega^*\cos\Omega^*\cos J^*; && \\ &a_{31}=\sin\Omega^*\sin J^*; && a_{32}=-\cos\Omega^*\sin J^*; && a_{33}=\cos J^*. \end{aligned} \tag{278}$$

Теперь уравнение коллинеарности для звездного снимка запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tilde{x}^* &= -f^*\frac{a_{11}L+a_{12}M+a_{13}N}{a_{31}L+a_{32}M+a_{33}N};\\ \tilde{y}^* &= -f^*\frac{a_{21}L+a_{22}M+a_{23}N}{a_{31}L+a_{32}M+a_{33}N}. \end{aligned} \tag{279}$$

В общем случае координаты звезд измеряются в системе координат снимка, а не относительно главной точки.

Введем следующие обозначения:

x', y' — координаты звезды относительно главной точки снимка, искаженные влиянием дисторсии;

x_0, y_0 — определяемые координаты главной точки;

x, y — измеренные координаты звезды в системе координат снимка;

$\bar{x}$, $\bar{y}$ — координаты звезды, исправленные за действие дисторсии.

Радиальное расстояние r от главной точки снимка до изображения звезды вычислим по формуле

$$r=\sqrt{x'^2+y'^2}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}. \tag{280}$$

Дифференцируя выражение (280), найдем поправки за дисторсию $\Delta x_r'$ и $\Delta y_r'$ в координаты звезды на снимке:

$$\Delta x_r'=\frac{x'}{r}\Delta r;\quad \Delta y_r'=\frac{y'}{r}\Delta r, \tag{281}$$

поэтому координаты, измеренные относительно главной точки и исправленные за дисторсию, будут определяться формулами:

$$\bar{x} = x' + \Delta x_r' = x' + \frac{x'}{r}\Delta r = x'\left(1 + \frac{\Delta r}{r}\right);$$
$$\bar{y} = y' + \Delta y_r' = y' + \frac{y'}{r}\Delta r = y'\left(1 + \frac{\Delta r}{r}\right). \qquad (282)$$

Теперь с учетом разложения радиальной дисторсии (269) уравнения коллинеарности получим в следующем виде:

$$(x - x_0)(1 + k_1r^2 + k_2r^4 + k_3r^6 + \ldots) = -f\frac{a_{11}L + a_{12}M + a_{13}N}{a_{31}L + a_{32}M + a_{33}N};$$
$$(y - y_0)(1 + k_1r^2 + k_2r^4 + k_3r^6 + \ldots) = -f\frac{a_{21}L + a_{22}M + a_{23}N}{a_{31}L + a_{32}M + a_{33}N}. \qquad (283)$$

Если ввести обозначения

$$U = a_{11}L + a_{12}M + a_{13}N;$$
$$V = a_{21}L + a_{22}M + a_{23}N;$$
$$W = a_{31}L + a_{32}M + a_{33}N; \qquad (284)$$
$$\nabla = (1 + k_1r^2 + k_2r^4 + k_3r^6 + \ldots),$$

то получим выражения для измеренных координат x и y:

$$x = -\frac{f}{\nabla}\frac{U}{W} + x_0;$$
$$y = -\frac{f}{\nabla}\frac{V}{W} + y_0. \qquad (285)$$

Уточним три группы неизвестных:

приближенные значения эйлеровых углов $\Omega_0{}^*$, $\omega_0{}^*$, $J_0{}^*$;

приближенные значения координат главной точки $x_0{}^0$, $y_0{}^0$ и фокусного расстояния f^0;

приближенные значения коэффициентов радиальной дисторсии k_1, k_2, k_3, ..., k_n.

Приближенные значения эйлеровых углов получают с использованием прямого метода (§ 17). Приближенные значения координат главной точки $x_0{}^0$ и $y_0{}^0$ и коэффициентов дисторсии можно принять равными нулю, а в качестве приближенного значения фокусного расстояния использовать его значение по паспортным данным камеры.

Линеаризация уравнений (285) приводит к двум уравнениям поправок для каждой звезды:

$$\underset{(2,3)}{\frac{\partial(\tilde{x}^*_{ij},\ \tilde{y}_{ij})}{\partial(x_0,\ y_0,\ f_0)}}\begin{pmatrix}\delta\tilde{x}_0\\ \delta\tilde{y}_0\\ \delta f^*\end{pmatrix}+\underset{(2,3)}{\frac{\partial(\tilde{x}^*_{ij},\ \tilde{y}^*_{ij})}{\partial(K_1,K_2,\ K_3)}}\begin{pmatrix}\delta K_1\\ \delta K_2\\ \delta K_3\end{pmatrix}_{(1,3)}+\underset{(2,3)}{\frac{\partial(\tilde{x}^*_{ij},\ \tilde{y}^*_{ij})}{\partial(\Omega^*,\ \omega^*,\ J^*)}}\begin{pmatrix}\delta\Omega^*\\ \delta\omega^*\\ \delta J^*\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\tilde{x}^*_{ij}-\tilde{x}^{0*}_{ij}\\ \tilde{y}^*_{ij}-\tilde{y}^{0*}_{ij}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\vartheta_x\\ \vartheta_y\end{pmatrix}_j; \qquad (286)$$

где $\delta\tilde{x}_0$, $\delta\tilde{y}_0$ и δf^* — поправки в элементы внутреннего ориентирования снимка;

δk_1, δk_2 и δk_3 — поправки в коэффициенты дисторсии;

$\delta\Omega^*$, $\delta\omega^*$ и δJ^* — поправки в эйлеровы углы: $\tilde{x}^{0*}_{ij}$ и $\tilde{y}^{0*}_{ij}$ — приближенные значения координат звезды, которые вычисляются по формулам (279) по приближенным значениям уточняемых величин;

$\tilde{x}^*_{ij}$, $\tilde{y}^*_{ij}$ — измеренные на компараторе координаты звезды;

ϑ_x, ϑ_y — поправки в измеренные на компараторе координаты, которые следует определить из уравнительных вычислений под условием (270).

Каждой паре уравнений поправок будет соответствовать весовая матрица

$$\underset{(2,2)}{\mathbf{P}_j}=\mathbf{K}_j^{-1}, \qquad (287)$$

где матрица $\mathbf{K}_j$ определяется формулой (272).

Для матриц, входящих в уравнение (286), примем следующие обозначения:

$$\underset{(2,3)}{\mathbf{B}^{(k)}_{ij}}=\frac{\partial(\tilde{x}^*_{ij},\ \tilde{y}_{ij})}{\partial(x_0,\ y_0,\ f^*)}=\begin{bmatrix}\frac{\partial\tilde{x}^*_{ij}}{\partial x_0} & \frac{\partial\tilde{x}^*_{ij}}{\partial y_0} & \frac{\partial\tilde{x}^*_{ij}}{\partial f^*}\\ \frac{\partial\tilde{y}^*_{ij}}{\partial x_0} & \frac{\partial\tilde{y}^*_{ij}}{\partial y_0} & \frac{\partial\tilde{y}^*_{ij}}{\partial f^*}\end{bmatrix}; \qquad (288)$$

$$\underset{(2,3)}{\mathbf{B}'^{(k)}_{ij}}=\frac{\partial(\tilde{x}^*_{ij},\ \tilde{y}^*_{ij})}{\partial(K_1,\ K_2,\ K_3)}=\begin{bmatrix}\frac{\partial\tilde{x}^*_{ij}}{\partial K_1} & \frac{\partial\tilde{x}^*_{ij}}{\partial K_2} & \frac{\partial\tilde{x}^*_{ij}}{\partial K_3}\\ \frac{\partial\tilde{y}^*_{ij}}{\partial K_1} & \frac{\partial\tilde{y}^*_{ij}}{\partial K_2} & \frac{\partial\tilde{y}^*_{ij}}{\partial K_3}\end{bmatrix}; \qquad (289)$$

$$\underset{(2,3)}{\hat{\mathbf{B}}_{ij}^{*(1)}} = \frac{\partial(\tilde{x}_{ij}^{*},\ \tilde{y}_{ij}^{*})}{\partial(\Omega^{*},\ \omega^{*},\ J^{*})} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \tilde{x}_{ij}^{*}}{\partial \Omega^{*}} & \dfrac{\partial \tilde{x}_{ij}^{*}}{\partial \omega^{*}} & \dfrac{\partial \tilde{x}_{ij}^{*}}{\partial J^{*}} \\ \dfrac{\partial \tilde{y}_{ij}^{*}}{\partial \Omega^{*}} & \dfrac{\partial \tilde{y}_{ij}^{*}}{\partial \omega^{*}} & \dfrac{\partial \tilde{y}_{ij}^{*}}{\partial J^{*}} \end{bmatrix}. \tag{290}$$

Векторы уточняемых параметров обозначим следующим образом:

$$\underset{(3,1)}{\bar{\delta}_{ij}^{(k)}} = \begin{pmatrix} \delta x_0 \\ \delta y_0 \\ \delta f^{*} \end{pmatrix}; \quad \underset{(3,1)}{\bar{\delta}_{ij}^{\prime(k)}} = \begin{pmatrix} \delta k_1 \\ \delta k_2 \\ \delta k_3 \end{pmatrix}; \quad \underset{(3,1)}{\bar{\delta}_{ij}^{*(1)}} = \begin{pmatrix} \delta\Omega^{*} \\ \delta\omega^{*} \\ \delta J^{*} \end{pmatrix}. \tag{291}$$

С учетом этих обозначений уравнение (286) запишем в следующем виде:

$$\underset{(2,3)}{\mathbf{B}_{ij}^{(k)}}\ \underset{(3,1)}{\delta_{ij}^{(k)}} + \underset{(2,3)}{\mathbf{B}_{ij}^{\prime(k)}}\ \underset{(3,1)}{\delta_{ij}^{\prime(k)}} + \underset{(2,3)}{\hat{\mathbf{B}}_{ij}^{*(1)}}\ \underset{(3,1)}{\hat{\delta}_{i}^{*(1)}} = \underset{(2,1)}{\bar{\varepsilon}_{ij}} + \underset{(2,1)}{\bar{\vartheta}_{ij}}, \tag{292}$$

где $\underset{(2,1)}{\bar{\varepsilon}_{ij}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{ij}^{*} - \tilde{x}_{ij}^{0*} \\ \tilde{y}_{ij}^{*} - \tilde{y}_{ij}^{0*} \end{bmatrix}$ — вектор свободных членов;

$\underset{(2,1)}{\bar{\vartheta}_{ij}}$ — вектор поправок в измеренные на компараторе координаты звезды.

Преобразуем матрицу (288), продифференцировав уравнения (285). Получим

$$\underset{(2,3)}{\mathbf{B}_{ij}^{(k)}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{U}{W} \\ 0 & 1 & -\dfrac{V}{W} \end{vmatrix}. \tag{293}$$

Найдем производные от координат по коэффициентам дисторсии k_1, k_2, k_3.

Для любого k справедливы равенства

$$\frac{\partial \tilde{x}_{ij}^{*}}{\partial k} = \frac{\partial \tilde{x}_{ij}^{*}}{\partial \nabla}\frac{\partial \nabla}{\partial k}; \quad \frac{\partial \tilde{y}_{ij}^{*}}{\partial k} = \frac{\partial \tilde{y}_{ij}^{*}}{\partial \nabla}\frac{\partial \nabla}{\partial k}. \tag{294}$$

При этом

$$\begin{gathered} \frac{\partial \nabla}{\partial k_1} = r^2; \quad \frac{\partial \nabla}{\partial k_2} = r^4; \quad \frac{\partial \nabla}{\partial k_3} = r^6; \\ \frac{\partial \tilde{x}_{ij}^{*}}{\partial \nabla} = f^{*}\frac{U}{W}\frac{1}{\nabla^2} \approx \tilde{x}_{ij}^{*}; \quad \frac{\partial \tilde{y}_{ij}^{*}}{\partial \nabla} = f^{*}\frac{V}{W}\frac{1}{\nabla^2} \approx \tilde{y}_{ij}^{*}. \end{gathered} \tag{295}$$

Поэтому

$$\underset{(2,3)}{\mathbf{B}_{ij}^{\prime(k)}} = \begin{bmatrix} -xr^2 & -xr^4 & -xr^6 \\ -yr^2 & -yr^4 & -yr^6 \end{bmatrix}. \tag{296}$$

Значения производных, входящих в матрицу $\underset{(2,3)}{\widehat{\mathbf{B}}_{ij}^{(1)}}$, получены ранее в § 14 и определяются формулами (198), в которых

$\frac{\partial J}{\partial \Omega^*}, \frac{\partial U}{\partial \omega^*}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial I^*}$ следует вычислять

на основании выражений

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial J}{\partial \Omega^*} \\ \frac{\partial U}{\partial \omega^*} \\ \frac{\partial J}{\partial I^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{12} & a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13}\sin\Omega^* & -a_{13}\cos\Omega^* & a_{33}\sin\omega^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix}; \tag{297}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial \Omega^*} \\ \frac{\partial V}{\partial \omega^*} \\ \frac{\partial V}{\partial I^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{22} & a_{21} & 0 \\ -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ a_{23}\sin\Omega^* & -a_{23}\cos\Omega^* & a_{33}\cos\omega^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix}; \tag{298}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial W}{\partial \Omega^*} \\ \frac{\partial W}{\partial \omega^*} \\ \frac{\partial W}{\partial I^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{32} & a_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{33}\sin\Omega^* & -a_{33}\cos\Omega^* & -\sin I^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix}. \tag{299}$$

Объединим неизвестные единым вектором $\bar{\delta}$:

$$\underset{(9,1)}{\bar{\delta}} = [\delta x_0 \delta y_0 \delta f \,\vdots\, \delta K_1 \delta K_2 \delta K_3 \,\vdots\, \delta\Omega^* \delta\omega^* \delta I^*]^T. \tag{300}$$

Систему уравнений поправок (292), вводимых в координаты звезд, запишем короче:

$$\underset{(2n,9)}{\mathbf{A}} \underset{(9,1)}{\bar{\delta}} = \underset{(2n,1)}{\bar{\varepsilon}} + \underset{(2n,1)}{\bar{\vartheta}}, \tag{301}$$

где $\mathbf{A}$ — матрица коэффициентов; $\bar{\varepsilon}$ — вектор свободных членов; $\bar{\vartheta}$ — вектор поправок в измеренные координаты звезд.

Тогда в соответствии с обобщенным принципом метода наименьших квадратов (270) будем иметь:

$$\underset{(9,1)}{\bar{\delta}} = \underset{(9,9)}{\mathbf{N}^{-1}}\underset{(9,2n)}{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}}\underset{(2n,2n)}{\mathbf{P}}\underset{(2n,1)}{\bar{\varepsilon}} = \underset{(9,2n)}{(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}}\underset{(2n,2n)}{\mathbf{P}}\underset{(2n,9)}{\mathbf{A})^{-1}}\underset{(9,2n)}{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}}\underset{(2n,2n)}{\mathbf{P}}\underset{(2n,1)}{\bar{\varepsilon}}, \qquad (302)$$

где $\mathbf{N}$ — матрица коэффициентов нормальных уравнений; $\mathbf{A}$ — матрица коэффициентов уравнений поправок для n звезд; $\mathbf{P} = [\mathrm{diad}\,\mathbf{K}]^{-1}$ — весовая матрица; $\bar{\varepsilon}$ — вектор свободных членов.

Определив вектор неизвестных $\bar{\delta}$ в соответствии с алгоритмом (301), подставим его в каждое из уравнений поправок и вычислим ошибку единицы веса μ:

$$\mu^2 = \frac{\bar{\vartheta}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\bar{\vartheta}}{2n-9}. \qquad (303)$$

Весь процесс повторяется k раз до тех пор, пока не стабилизируется $\vartheta^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\vartheta$. Вектор поправок k-го приближения будет удовлетворять условию

$$|\,\bar{\delta}^{k-1} - \bar{\delta}^{k}\,| \leqslant |\,\bar{\Delta}\,|, \qquad (304)$$

где $|\bar{\Delta}|$ — точность вычислений.

В заключение выполняется оценка точности. По формуле (303) вычисляются ошибка единицы веса и средние квадратические ошибки неизвестных:

$$\begin{aligned}
&m_{x_0} = \mu\sqrt{q_{11}};\quad m_{k_1} = \mu\sqrt{q_{44}};\quad m_{\Omega} = \mu\sqrt{q_{77}};\\
&m_{y_0} = \mu\sqrt{q_{22}};\quad m_{k_2} = \mu\sqrt{q_{55}};\quad m_{\omega} = \mu\sqrt{q_{88}};\\
&m_{f} = \mu\sqrt{q_{33}};\quad m_{k_3} = \mu\sqrt{q_{66}};\quad m_{J} = \mu\sqrt{q_{99}},
\end{aligned} \qquad (305)$$

где $q_{11}, q_{22}, \ldots, q_{99}$ — диагональные элементы обратной матрицы нормальных уравнений $\underset{(9,9)}{\mathbf{N}^{-1}}$.

Рассмотренный процесс является ньютоновским итерационным процессом, скорость сходимости которого зависит от принятых приближенных значений, а также от определителя матрицы уравнений поправок $\underset{(2n,9)}{\mathbf{A}}$ в начальном приближении. Если определитель матрицы $\underset{(2n,9)}{\mathbf{A}}$ близок к нулю, то процесс может стать расходящимся.

Если приближенные значения эйлеровых углов определены по алгоритму, описанному в § 17, то, как правило, выполняют два-три приближения. В обработку включают 40—50 звезд, расположенных, по возможности, равномерно по площади звездного снимка.

Таблица 3

Номер звезды по каталогу	Инерциальные координаты		Измеренные координаты	
	α	δ	x, мм	y, мм
70 408	$17^h05^m41{,}45^s$	—51,252 19°	28,1019	6,2329
50 501	15 35 17,66	—61,190 043	—25,1469	31,2623
70 348	17 00 35,97	—42,250 056	+37,4262	—26,2457
68 326	16 17 16,45	—42,831 205	+8,1732	—32,4305
70 518	17 25 09,36	—51,723 383	+37,8207	12,4309

Таблица 4

Номер звезды по каталогу	L	M	N
70 408	$-1{,}469\ 3292\cdot10^{-1}$	$-6{,}084\ 0248\cdot10^{-1}$	$-7{,}799\ 0841\cdot10^{-1}$
50 501	$-2{,}844\ 5632\cdot10^{-1}$	$-3{,}889\ 961\cdot10^{-1}$	$-8{,}762\ 2298\cdot10^{-1}$
70 348	$-1{,}897\ 1136\cdot10^{-1}$	$-7{,}154\ 9389\cdot10^{-1}$	$-6{,}723\ 6753\cdot10^{-1}$
68 326	$-3{,}178\ 1427\cdot10^{-1}$	$-6{,}609\ 1652\cdot10^{-1}$	$-6{,}798\ 4082\cdot10^{-1}$
70 518	$-9{,}381\ 7385\cdot10^{-1}$	$-6{,}123\ 1318\cdot10^{-1}$	$-7{,}850\ 2929\cdot10^{-1}$

Пример 11. В численном примере 10 прямым методом получены приближенные значения элементов матрицы Π_i^{0*}, осуществляющей переход от инерциальной системы координат x, y, z к системе координат звездного снимка. Матрицу обратного преобразования $\mathbf{Q}_i^0$ определяют из выражения

$$\mathbf{Q}_i^0 = (\Pi_i^{0*})^{\tau}.$$

Оиа в соответствии с результатами, полученными в примере 10, имеет вид

$$\mathbf{Q}_i^0 = \begin{bmatrix} 8{,}050\,323\cdot10^{-1} & -5{,}788\,4255\cdot10^{-1} & 1{,}298\,6563\cdot10^{-1} \\ 5{,}273\,5352\cdot10^{-1} & 5{,}980\,132\cdot10^{-1} & -6{,}035\,5519\cdot10^{-1} \\ 2{,}717\,021\cdot10^{-1} & 5{,}943\,6621\cdot10^{-1} & 7{,}866\,7428\cdot10^{-1} \end{bmatrix}.$$

Матрица $\mathbf{Q}_i^0$ соответствует поворотам на эйлеровы углы, приближенные значения которых:

$$\Omega_0^* = \operatorname{arctg}\left(\frac{-a_{31}}{a_{32}}\right) = -26{,}110\,077°; \quad \omega_0^* = \operatorname{arctg}\left(\frac{a_{13}}{a_{23}}\right) = -12\ 143\,068°;$$

$$J_0^* = -a_{33} = -38.124\,209°.$$

Уточним приближенные значения эйлеровых углов по результатам измерения координат пяти звезд звездной камерой с фокусным расстоянием $f^* = 210{,}0032$ мм (табл. 3).

Решение.

1. Определим направляющие косинусов звезд в инерциальной системе координат (табл. 4).

2. Вычислим величины U°, V°, W° и $\chi = \frac{f}{W^2}$ (табл. 5):

$$U^0 = a_{11}L + a_{12}M + a_{13}N;$$
$$V^0 = a_{21}L + a_{22}M + a_{23}N;$$
$$W^0 = a_{31}L + a_{32}M + a_{33}N.$$

Таблица 5

Номер звезды по каталогу	U^0	V^0	W^0	χ
70 408	$1.326\ 001\ 9\cdot10^{-1}$	$2,939\ 947\cdot10^{-2}$	$-9,907\ 3365\cdot10^{-1}$	213,949 89
50 501	$-1,176\ 202\ 9\cdot10^{-1}$	$1,462\ 1509\cdot10^{-1}$	$-9,822\ 3575\cdot10^{-1}$	217,667 91
70 348	$1,741\ 171\ 1\cdot10^{-1}$	$-1,221\ 0883\cdot10^{-1}$	$-9,771\ 2485\cdot10^{-1}$	219,950 92
68 326	$3.842\ 789\cdot10^{-2}$	$-1,525\ 1581\cdot10^{-1}$	$-9,875\ 5388\cdot10^{-1}$	215,329 86
70 518	$1.769\ 585\ 9\cdot10^{-1}$	$5,816\ 221\cdot10^{-2}$	$-9,824\ 9487\cdot10^{-1}$	217,551 51

Таблица 6

Номер звезды по каталогу	l_{x_j}	l_{y_j}
70 408	$-5\cdot10^{-3}$	$+1,2\cdot10^{-3}$
50 501	$+5\cdot10^{-4}$	$+1,3\cdot10^{-3}$
70 348	$+5,1\cdot10^{-3}$	$-2,1\cdot10^{-3}$
68 326	$+1,5\cdot10^{-3}$	$+2,0\cdot10^{-3}$
70 518	$-3,1\cdot10^{-3}$	$-9,0\cdot10^{-4}$

Таблица 7

Производная	Номер звезды по каталогу				
	70 408	50 8501	70 348	68 326	70 518
$\frac{\partial U^0}{\partial \Omega^0}$	$-5,748\cdot10^{-1}$	$-4,788\cdot10^{-1}$	$-6,858\cdot10^{-1}$	$-7,160\cdot10^{-1}$	$-5,472\cdot10^{-1}$
$\frac{\partial U^0}{\partial \omega^0}$	$2,940\cdot10^{-2}$	$1,462\cdot10^{-1}$	$-1,221\cdot10^{-1}$	$-1,525\cdot10^{-1}$	$5,816\cdot10^{-2}$
$\frac{\partial U^0}{\partial J^0}$	$2,084\cdot10^{-1}$	$2,066\cdot10^{-1}$	$2,055\cdot10^{-1}$	$2,077\cdot10^{-1}$	$2,067\cdot10^{-1}$
$\frac{\partial V^0}{\partial \Omega^0}$	$-2,330\cdot10^{-1}$	$-3,503\cdot10^{-2}$	$-2,639\cdot10^{-1}$	$-1,585\cdot10^{-1}$	$-2,668\cdot10^{-1}$
$\frac{\partial V^0}{\partial \omega^0}$	$-1,326\cdot10^{-1}$	$1,176\cdot10^{-1}$	$-1,741\cdot10^{-1}$	$-3,843\cdot10^{-2}$	$-1,770\cdot10^{-1}$
$\frac{\partial V^0}{\partial J^0}$	$-9,686\cdot10^{-1}$	$-9,602\cdot10^{-1}$	$-9,553\cdot10^{-1}$	$-9,654\cdot10^{-1}$	$-9,605\cdot10^{-1}$
$\frac{\partial W^0}{\partial \Omega^0}$	$-8,358\cdot10^{-2}$	$5,200\cdot10^{-2}$	$-8,923\cdot10^{-2}$	$-3,387\cdot10^{-3}$	$-1,144\cdot10^{-1}$
$\frac{\partial W^0}{\partial \omega^0}$	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
$\frac{\partial W^0}{\partial J^0}$	$9,621\cdot10^{-1}$	$9,142\cdot10^{-1}$	$9,862\cdot10^{-1}$	$9,966\cdot10^{-1}$	$9,497\cdot10^{-1}$

3. Определим приближенные координаты звезд на снимке:

$$\tilde{x}^{0*} = -f^* \frac{U^0}{W^0}; \quad \tilde{y}^{0*} = -f^* \frac{V^0}{W^0}.$$

4. Составим таблицу свободных членов (табл. 6):

$$l_{x_j} = \tilde{x}_j^* - \tilde{x}_j^{0*}; \quad l_{y_j} = \tilde{y}_j^* - \tilde{y}_j^{0*}.$$

Поскольку свободные члены того же порядка, что и точность измерений на компараторе, ограничимся одним приближением.

5. Вычислим производные от U^0, V^0, W^0 по Ω^0, ω^0, J^0 (табл. 7) на основании формул (297) и (299).

6. Вычислим элементы матрицы $\underset{(2,3)}{\hat{B}^*_{ij}}$ по формулам (290) и (198):

$$\underset{(10,3)}{\hat{B}^{*(1)}} = \begin{bmatrix} \hat{B}^{*(1)}_{11} \\ \hat{B}^{*(1)}_{12} \\ \hat{B}^{*(1)}_{13} \\ \hat{B}^{*(1)}_{14} \\ \hat{B}^{*(1)}_{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -124,22 & 6,23 & 70,11 \\ -49,91 & -28,11 & -199,56 \\ -103,64 & 31,26 & 20,76 \\ -5,83 & 25,14 & -176,20 \\ -144,94 & -26,24 & 81,93 \\ -54,32 & -34,71 & -231,80 \\ -152,28 & 32,43 & 52,41 \\ -33,59 & -8,17 & -238,02 \\ -121,36 & 12,43 & 80,74 \\ -58,47 & -37,83 & -193,28 \end{bmatrix}.$$

7. Составим матрицу $\underset{(3,3)}{N}$ нормальных уравнений:

$$\underset{(3,3)}{N} = \left(\underset{(3,10)}{\hat{B}^{*(1)}} \right)^T \left(\underset{(10,3)}{\hat{B}^{*(1)}} \right);$$

$$\underset{(3,3)}{N} = \begin{bmatrix} 95\,120 & 8\,847 & 2\,360 \\ 8\,847 & 7\,036 & 16\,722 \\ 2\,360 & 16\,722 & 239\,937 \end{bmatrix}.$$

8. Получим обратную матрицу N^{-1} нормальных уравнений:

$$\underset{(3,3)}{N^{-1}} = \begin{bmatrix} 1,215\,7 \cdot 10^{-5} & -1,7980 \cdot 10^{-5} & 1,133\,54 \cdot 10^{-6} \\ -1,798\,0 \cdot 10^{-5} & 1,9693 \cdot 10^{-4} & -1,354\,8 \cdot 10^{-5} \\ 1,133\,54 \cdot 10^{-6} & -1,3548 \cdot 10^{-5} & 5,100\,822 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}.$$

9 Вычислим вектор $\underset{(3,1)}{\bar{\varepsilon}_N}$ свободных членов $\left(\underset{(3,10)}{\widehat{B}^{*(1)}}\right)^T \underset{(10,1)}{\bar{\varepsilon}}$ нормальных уравнений:

$$\underset{(3,1)}{\bar{\varepsilon}_N} = \left(\underset{(3,10)}{\widehat{B}^{*(1)}}\right)^T \underset{(10,1)}{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} 1.26\cdot 10^{-1} \\ 2.26\cdot 10^{-1} \\ -2.37\cdot 10^{-1} \end{bmatrix}.$$

10. Определим поправки в эйлеровы углы (угл. с):

$$\underset{(3,1)}{\bar{\delta}} = \underset{(3,3)}{N^{-1}}\ \underset{(3,1)}{\bar{\varepsilon}_N} = \begin{bmatrix} \delta\Omega^* \\ \delta\omega^* \\ \delta J^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,800\cdot 10^{-6} \\ 4,545\cdot 10^{-5} \\ -4,128\cdot 10^{-6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.57 \\ 9,37 \\ 0.85 \end{bmatrix}.$$

11. Вычислим вектор поправок $\underset{(10,1}{\bar{\vartheta}}$ в измеренные на компараторе координаты звезд:

$$\underset{(10,1)}{\bar{\vartheta}} = \underset{(10,3)}{\widehat{B}^{*(1)}}\ \underset{(3,1)}{\bar{\delta}} - \underset{(10,1)}{\bar{\varepsilon}},$$

т. е.

$$\underset{(10,1)}{\bar{\vartheta}} = \begin{bmatrix} 5.3\cdot 10^{-3} \\ -1.5\cdot 10^{-3} \\ 1,12\cdot 10^{-3} \\ 5.9\cdot 10^{-4} \\ -6.2\cdot 10^{-3} \\ 1.6\cdot 10^{-3} \\ -2.8\cdot 10^{-3} \\ -1.3\cdot 10^{-3} \\ 3.7\cdot 10^{-3} \\ 1.4\cdot 10^{-4} \end{bmatrix}.$$

12. Определим ошибку единицы веса μ,

$$\mu^2 = \frac{\bar{\vartheta}^T\bar{\vartheta}}{2n-3} = \frac{\sum^{2n}\vartheta^2}{7};$$

$\mu = 3,7\cdot 10^{-3}$ мм.

13. Вычислим средние квадратические ошибки эйлеровых углов:

$m_\Omega = \mu\sqrt{q_{\Omega\Omega}} = 3,7\cdot 10^{-3}\sqrt{1,2157\cdot 10^{-5}} = 1,29\cdot 10^{-5} = 2,7''$;

$m_\omega = \mu\sqrt{q_{\omega\omega}} = 3.7\cdot 10^{-3}\sqrt{1,9693\cdot 10^{-4}} = 5,19\cdot 10^{-5} = 10,1''$;

$m_J = \mu\sqrt{q_{JJ}} = 3,7\cdot 10^{-3}\sqrt{5,1008\cdot 10^{-6}} = 8,36\cdot 10^{-6} = 1,7''$.

14. Найдем уравненные значения эйлеровых углов:

$\delta\Omega^* = -0,57'' = -1,58^\circ\cdot 10^{-4}$; $\Omega^* = \Omega_0^* + \delta\Omega^* = -26,110\,235^\circ$;

$\delta\omega^* = 9,37'' = 2,602^\circ\cdot 10^{-3}$; $\omega^* = \omega_0^* + \delta\omega^* = -12,140\,466^\circ$;

$\delta J'' = 0,85'' = 2,36\cdot 10^{-4}$; $J^* = J_0^* + \delta J^* = -38,123\,973^\circ$.

§ 19. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПЕРАТОРА ВЗАИМНОЙ ОРИЕНТАЦИИ ЗВЕЗДНОГО И ТОПОГРАФИЧЕСКОГО СНИМКОВ

Оператор взаимной ориентации звездного и топографического снимков Π_0 осуществляет переход от системы координат топографического снимка к системе координат звездного снимка, т. е.

$$\bar{r}_*^0 = \Pi_0 \bar{r}_t^0 = \Pi \begin{pmatrix} l_t \\ m_t \\ n_t \end{pmatrix}. \tag{306}$$

Элементы оператора Π_0 обычно определяют на момент установки камер на борту ИСЗ. Однако в процессе запуска и космического полета вследствие перегрузок и больших перепадов температуры корпус ИСЗ подвергается деформациям, которые приводят к изменению элементов оператора Π_0. Поэтому возникает задача определения оператора Π_0 непосредственно в процессе космического полета. Это можно сделать по результатам синхронного фотографирования звездного неба топографической и звездной камерами.

Пусть Π_* — оператор ориентации звездного снимка в инерциальной системе координат; Π_t — оператор ориентации топографического снимка; $\bar{r}^0$ — направление на некоторую звезду в инерциальной системе координат. Тогда

$$\begin{aligned} \bar{r}^0 &= \Pi_* \bar{r}_*^0; \\ \bar{r}_0 &= \Pi_t \bar{r}_t^0, \end{aligned} \tag{307}$$

где $\bar{r}_*^0$ — направление на звезду в системе координат звездного снимка; $\bar{r}_t^0$ — направление на звезду в системе координат топографического снимка.

Из первого уравнения (307) выразим $\bar{r}_*^0$,

$$\bar{r}_*^0 = \Pi_*^T \bar{r}^0, \tag{308}$$

подставим выражения для $\bar{r}^0$ из второго уравнения (307) в уравнение (308):

$$\bar{r}_*^0 = \Pi_*^T \Pi_t \bar{r}_t^0. \tag{309}$$

Сравнивая уравнения (308) и (309), получаем

$$\Pi_0 = \Pi_*^T \Pi_t. \tag{310}$$

Следовательно, чтобы получить оператор Π_0 взаимной ориентации снимков, необходимо определить ориентацию звездного и топографического снимков в инерциальной системе координат по результатам синхронного фотографирования звездного неба,

транспонировать оператор ориентации звездного снимка и выполнить умножение матриц в соответствии с выражением (310).

Рассмотренное решение дает только принцип определения оператора Π_0, поскольку изменение ориентации осей корабля при фотографировании звездного неба обеими камерами нарушает условия съемки (оптическая ось топографической камеры должна отслеживать центр масс планеты). Поэтому на практике задача решается путем синхронного фотографирования поверхности планеты топографической камерой и звездного неба звездной камерой.

Предположим, что топографической камерой сфотографирован участок поверхности планеты, на котором уверенно идентифицируется ряд пунктов с известными планетоцентрическими координатами, а звездной камерой в этот же момент выполнено фотографирование звездного неба. Тогда последовательность операций при определении оператора Π_0 взаимной ориентации будет следующей.

1. Опознавание и маркировка исходных пунктов на поверхности планеты.

2. Измерение координат исходных пунктов в системе координат топографического снимка (x_t, y_t).

3. Перевычисление координат исходных пунктов из гринвичской системы координат (в случае съемок Земли) в инерциальную систему координат:

$$\begin{aligned} x &= X_\text{г}\cos S - Y_\text{г}\sin S; \\ y &= X_\text{г}\sin S + Y_\text{г}\cos S; \\ z &= Z_\text{г}, \end{aligned} \qquad (311)$$

где x, y, z — инерциальные координаты пунктов; $X_\text{г}, Y_\text{г}, Z_\text{г}$ — гринвичские координаты; S — истинное звездное время в момент фотографирования t_j в системе времени UT1.

4. Определение оператора Π_t ориентации топографического снимка в соответствии с алгоритмами, изложенными в §§ 17 и 18.

5. Отождествление звезд на звездном снимке.

6. Измерение координат звезд на звездном снимке (x_*, y_*).

7. Редуцирование положений звезд на эпоху t_j.

8. Определение оператора Π ориентации звездного снимка в инерциальной системе координат.

9. Определение оператора Π_0 взаимной ориентации камер на основании формулы (310).

Глава IV

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ИСЗ

§ 20. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ИСЗ

В этой главе рассмотрены те основные вопросы теории движения ИСЗ, которые необходимы для решения задачи определения орбит по результатам фотограмметрических измерений снимков, полученных с их борта, а также для построения маршрутных и блочных сетей космической фототриангуляции, когда в качестве неизвестных принимаются начальные условия движения ИСЗ.

Теория возмущенного движения ИСЗ учитывает все возмущающие факторы — неоднородность гравитационного поля Земли, сопротивление атмосферы, притяжение спутника Солнцем и Луной, давление солнечного излучения. Это дает возможность с высокой степенью точности предсказать значения координат и составляющих скорости ИСЗ в любой момент t_i, при условии, что начальные условия движения — координаты x_0, y_0, z_0 и составляющие скорости $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$ $\dot{z}_0$ для некоторой начальной эпохи t_0 известны.

Определение начальных условий движения $(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)_{t=t}$ для некоторой начальной эпохи t_0 по совокупности орбитальных измерений, выполненных на временном интервале $(t_j—t_0)$, и ковариационной матрицы $K_{6.6}$ начальных условий называется определением орбиты.

Теория движения картографических и ресурсных ИСЗ представляет собой весьма сложный раздел прикладной небесной механики в силу особенностей движения этих объектов. Картографические и ресурсные ИСЗ, как правило, имеют низкие орбиты с высотой перицентра порядка 300—400 км и с наклонениями больше 70°. Поэтому даже небольшие изменения концентраций масс в теле Земли вызывают короткопериодические возмущения элементов орбиты. Кроме того, поскольку движение происходит в довольно плотных слоях атмосферы, необходимо иметь совершенную модель атмосферы, позволяющую учитывать с высокой точностью возмущения.

При решении задач космической фотограмметрии необходимо высокоточное интегрирование уравнений движения с учетом всех возмущающих факторов для вычисления свободных членов уравнений поправок при определении орбит ИСЗ фотограмметрическими методами и уравнивании сетей космической фототриангуляции. Вычислительные центры, ведущие обработку космической информации, обладают комплексами программ, реализующих эту сложную задачу, и выдают заинтересованным учреждениям результаты интегрирования уравнений движения конкретных ИСЗ, как правило, для равноотстоящих промежутков времени. Инженеру-фото-

грамметристу, решающему задачи космической фотограмметрии, располагающему такой эфемеридной информацией, следует выполнить интерполирование координат и составляющих скорости для моментов фотографирования.

§ 21. ЗАКОНЫ КЕПЛЕРА

В теории невозмущенного движения ИСЗ полагают, что спутник обращается вокруг сферической Земли с абсолютно равномерным распределением масс в ее теле и сила притяжения спутника сферической Земли является единственной причиной его орбитального движения. В этом случае всю массу Земли можно представить точечной, сосредоточенной в центре масс Земли, и рассматривать движение спутника в гравитационном поле, создаваемом центром масс Земли. Спутник при этом рассматривают как материальную точку, обладающую единичной массой.

В этом случае движение ИСЗ по орбите будет описываться законами Кеплера, которые применительно к движению ИСЗ вокруг центра масс Земли сформулируем следующим образом.

Первый закон Кеплера. Спутник движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится центр масс Земли.

Пусть точка M является фокусом, в котором находится центр масс Земли (рис. 16). Точка $П$ орбитального эллипса, ближайшая к фокусу M называется перицентром. Точка A, наиболее удаленная от фокуса M, называется апоцентром. Линия, соединяющая точки A и $П$, называется линией апсид, а сами точки A и $П$ — апсидами. Пусть точка i — положение ИСЗ на орбите в момент t_i. Введем орбитальную систему координат x_ω, y_ω, $z_\omega=0$, в которой будем описывать движение ИСЗ по эллипсу. Начало этой системы координат находится в центре масс M, положительное направление оси x_ω совпадает с направлением в перицентр.

Полярными координатами в орбитальной системе координат являются радиус-вектор $\bar{\mathbf{r}}$ и истинная аномалия ϑ, которая отсчитывается от оси x_ω до положения ИСЗ на орбите.

Из аналитической геометрии известно уравнение эллипса в полярных координатах:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\vartheta}, \tag{312}$$

где a — большая полуось орбиты; e — эксцентриситет орбиты.

Причем

$$e = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}, \tag{313}$$

где b — малая полуось орбиты, $b=a\sqrt{1-e^2}$. Величину p определяют по формуле

$$p=a(1-e^2) \tag{314}$$

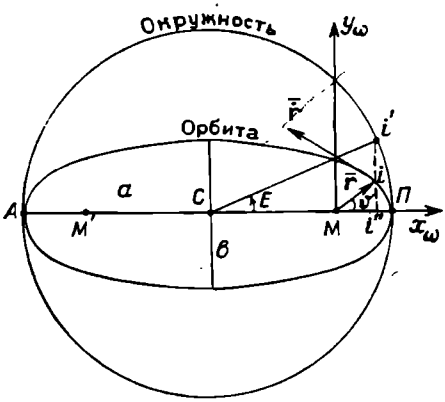

Рис. 16. Орбитальный эллипс

и называют фокальным параметром.

Выражение (312) запишем в виде

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\vartheta}, \qquad (315)$$

оно является математической формулировкой первого закона Кеплера.

Орбитальные координаты ИСЗ x_ω и y_ω вычисляют по формулам:

$$x_\omega = r\cos\vartheta; \quad y_\omega = r\sin\vartheta. \qquad (316)$$

Часто уравнение (315) записывают в другой форме, для получения которой выполним следующие построения. Радиусом a, равным большой полуоси орбитального эллипса, опишем из центра эллипса C окружность. Спроектируем на эту окружность мгновенное положение i ИСЗ на орбите, восставив перпендикуляр ii'' к линии апсид и продолжив его до пересечения с окружностью в точке i'. Соединив точку i' с центром эллипса C, получим угол E между направлением в перицентр и направлением в точку i'. Угол E называют эксцентрической аномалией и, если ее выбрать в качестве аргумента, то уравнение эллипса будет иметь вид

$$r = a(1 - e\cos E). \qquad (317)$$

Тогда орбитальные координаты ИСЗ x_ω и y_ω выразим следующим образом:

$$\begin{aligned} x_\omega &= a(\cos E - e); \\ y_\omega &= a\sqrt{1 - e^2}\sin E. \end{aligned} \qquad (318)$$

Второй закон Кеплера. Движение ИСЗ по орбитальному эллипсу происходит так, что радиус-вектор описывает равные площади за равные промежутки времени.

Следствием второго закона Кеплера является неравномерность движения ИСЗ по орбите. При этом максимального значения орбитальная скорость $\bar{r}$ достигает в перицентре орбиты, а минимального — в апоцентре.

Третий закон Кеплера. Квадраты периодов обращения (T_1^2 и T_2^2) любых двух спутников относятся как кубы больших полуосей (a_1^3 и a_2^3) их орбит, т. е.

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3. \qquad (319)$$

Следствием третьего закона Кеплера является формула для периода обращения ИСЗ $T=2\pi\frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu_\oplus}}$, где $\mu_\oplus$ — геоцентрическая гравитационная постоянная, равная $\mu_\oplus = fM_\oplus = 398\,600{,}5\cdot 10^9$ м³/с²; f — постоянная всемирного тяготения; $M_\oplus$ — масса Земли. Величина $\mu_\oplus$ является одной из фундаментальных геофизических констант.

§ 22. ОРИЕНТАЦИЯ ПЛОСКОСТИ ОРБИТАЛЬНОГО ЭЛЛИПСА В ИНЕРЦИАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим геоцентрическую небесную сферу единичного радиуса, центр o которой совпадает с центром масс Земли и, следовательно, с фокусом орбитального эллипса (рис. 17). Плоскость орбитального эллипса пересекается с геоцентрической сферой по дуге большого круга, которая является следом орбиты на геоцентрической сфере. Будем использовать две системы координат:

$oxyz$ — инерциальная система координат, ось ox которой направлена в истинную точку весеннего равноденствия γ некоторой эпохи t_0;

$ox_\omega y_\omega z_\omega$ — орбитальная система координат; ось $oz_\omega = 0$, так как направлена по нормали к плоскости орбиты.

Пусть $\bar{e}_x$, $\bar{e}_y$ и $\bar{e}_z$ — орты соответствующих осей инерциальной системы координат, а $\bar{P}$, $\bar{Q}$ и $\bar{W}$ — орты орбитальной системы.

Тогда геоцентрический вектор $\mathbf{r}$ ИСЗ можно представить в векторной форме как

$$\bar{\mathbf{r}} = x\bar{\mathbf{e}}_x + y\bar{\mathbf{e}}_y + z\bar{\mathbf{e}}_z \qquad (320)$$

или

$$\bar{\mathbf{r}} = x_\omega\bar{\mathbf{P}} + y_\omega\bar{\mathbf{Q}} + (0)\,\bar{\mathbf{W}}. \qquad (321)$$

Ориентацию триэдра $\bar{\mathbf{P}}$, $\bar{\mathbf{Q}}$, $\bar{\mathbf{W}}$ относительно инерциального триэдра $\bar{e}_x$, $\bar{e}_y$, $\bar{e}_z$ зададим ортогональной матрицей $\mathbf{C}$. Тогда

$$\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{P}}\\ \bar{\mathbf{Q}}\\ \bar{\mathbf{W}}\end{bmatrix} = \mathbf{C}\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{e}}_x\\ \bar{\mathbf{e}}_y\\ \bar{\mathbf{e}}_z\end{bmatrix} \qquad (322)$$

или

$$\begin{bmatrix}x_\omega\\ y_\omega\\ z_\omega\end{bmatrix} = \mathbf{C}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}. \qquad (323)$$

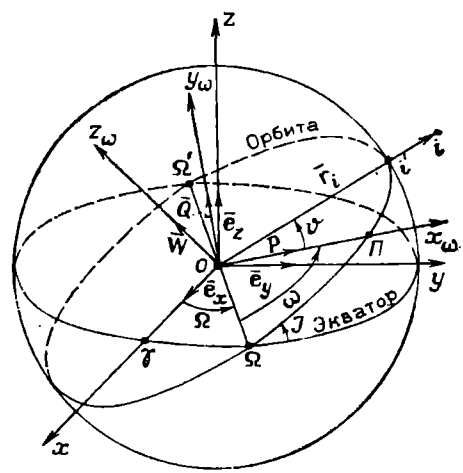

Рис. 17. Инерциальные и орбитальные координаты

Элементы ортогональной матрицы **C** выразим через те же эйлеровы углы Ω, ω, J, которые были использованы в предшествующем изложении.

Угол

$$u=\omega+\vartheta \tag{324}$$

называется аргументом широты.

Элементы c_{ik} матрицы **C** выразим как функции эйлеровых углов Ω, ω, J, т. е.

$$\begin{gathered}c_{11}=\cos\Omega\cos\omega-\sin\Omega\sin\omega\cos J;\ c_{12}=-\cos\Omega\sin\omega-\\ -\sin\Omega\cos\omega\cos J;\ c_{13}=\sin\Omega\sin J;\\ c_{21}=\sin\Omega\cos\omega+\cos\Omega\sin\omega\cos J;\ c_{22}=-\sin\Omega\sin\omega+\\ +\cos\Omega\cos\omega\cos J;\ c_{32}=-\cos\Omega\sin J;\\ c_{31}=\sin\omega\sin J;\ c_{32}=\cos\omega\sin J;\ c_{33}=\cos J.\end{gathered} \tag{325}$$

Обратное преобразование имеет вид

$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}x_\omega\\ y_\omega\\ z_\omega=0\end{bmatrix}, \tag{326}$$

откуда

$$\begin{aligned}x&=c_{11}x_\omega+c_{12}y_\omega=c_{11}r\cos\vartheta+c_{12}r\sin\vartheta;\\ y&=c_{12}x_\omega+c_{22}y_\omega=c_{12}r\cos\vartheta+c_{22}r\sin\vartheta;\\ z&=c_{13}x_\omega+c_{23}y_\omega=c_{13}r\cos\vartheta+c_{23}r\sin\vartheta.\end{aligned} \tag{327}$$

После элементарных преобразований выражений (327) с учетом формулы (324) получим

$$\begin{aligned}x&=r(\cos u\cos\Omega-\sin u\sin\Omega\cos J);\\ y&=r(\cos u\sin\Omega+\sin u\cos\Omega\cos J);\\ z&=z\sin u\sin J.\end{aligned} \tag{328}$$

§ 23. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НЕВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ИСЗ И ИХ ИНТЕГРАЛЫ

В соответствии с законом всемирного тяготения центр масс Земли (масса $M_\oplus$) и спутник (масса m) притягивают друг друга с силой

$$F=-\frac{fM_\oplus m}{r^2}. \tag{329}$$

С другой стороны, по второму закону Ньютона,

$$F=ma, \tag{330}$$

где a — ускорение.

Приравняв выражения (329) и (330), получим выражение для ускорения

$$a = -\frac{fM_{\oplus}}{r^2} = -\frac{\mu_{\oplus}}{r^2}. \tag{331}$$

Проецируя ускорение на оси инерциальной системы координат, будем иметь:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu_{\oplus}}{r^2}\cos\alpha; \\ a_y &= \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu_{\oplus}}{r^2}\cos\beta; \\ a_z &= \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\mu_{\oplus}}{r^2}\cos\gamma, \end{aligned} \tag{332}$$

где $\cos\alpha = x/r$; $\cos\beta = y/r$; $\cos\gamma = z/r$ — направляющие косинусы геоцентрического вектора $\bar{r}$ ИСЗ. Подставив значения направляющих косинусов в формулы (332), получим:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \ddot{x} = -\mu_{\oplus}\frac{x}{r^3}; \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \ddot{y} = -\mu_{\oplus}\frac{y}{r^3}; \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \ddot{z} = -\mu_{\oplus}\frac{z}{r^3} \end{aligned} \tag{333}$$

или в векторной форме

$$\ddot{\bar{r}} = -\mu_{\oplus}\frac{\bar{r}}{r^3}. \tag{334}$$

Уравнения (333) представляют собой систему трех нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, в результате интегрирования которой для любого момента t_i можно получить координаты x, y, z ИСЗ и составляющие вектора скорости $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$. При этом должны быть известны начальные условия интегрирования, которыми являются координаты x_0, y_0, z_0 и составляющие скорости ($\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$) для начальной эпохи t_0.

Начальные условия можно задать элементами кеплеровой орбиты, которыми являются: большая полуось a; эксцентриситет e; долгота восходящего узла Ω; аргумент перицентра ω; наклонение орбиты J; время прохождения спутника через перицентр $t_П$. Последний элемент $t_П$ часто заменяется линейной функцией времени.

При невозмущенном движении пять элементов орбиты a, e, Ω, ω, J являются постоянными, переменный — шестой элемент, $t_П$ (либо линейная функция времени). В дальнейшем изложении будем использовать обе формы задания начальных условий.

Таким образом, геоцентрический вектор $\bar{r}_i$ ИСЗ в момент t_i можно представить векторной функцией координат и времени

$$\bar{r}(t_i) = \bar{r}_i(x_0,\ y_0,\ z_0,\ \dot{x}_0,\ \dot{y}_0,\ \dot{z}_0;\ t_i - t_0) \tag{335}$$

либо векторной функцией элементов кеплеровой орбиты и времени

$$\bar{r}(t_i) = \bar{r}_i(a,\ e,\ \Omega,\ \omega,\ J,\ t_П;\ t_i - t_0). \tag{336}$$

Интеграл энергии. Умножим скалярно обе части векторного дифференциального уравнения (334) на вектор скорости $\dot{\bar{r}}$. Получим

$$\ddot{\bar{r}}\,\dot{\bar{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\bar{r}\,\dot{\bar{r}} \tag{337}$$

или

$$\ddot{\bar{r}}\,\dot{\bar{r}} = -\frac{\mu}{r^2}\dot{\bar{r}}. \tag{338}$$

Обе части дифференциального уравнения (338) являются полными дифференциалами, так как

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\dot{\bar{r}}\,\dot{\bar{r}}}{2}\right] = \ddot{\bar{r}}\,\dot{\bar{r}} \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu}{r}\right) = -\frac{\mu\,\dot{r}}{r^2}. \tag{339}$$

Следовательно, интегрируя (338), получим интеграл энергии

$$\frac{1}{2}v^2 = -\frac{\mu_\oplus}{r} = \text{const} = K. \tag{340}$$

Константа K представляет собой полную энергию, отнесенную к единичной массе,

$$K = \frac{\mu_\oplus}{2a}. \tag{341}$$

Определим скорость v ИСЗ с учетом K:

$$v^2 = \mu_\oplus\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right); \tag{342}$$

из уравнения (340) следует, что орбитальная скорость зависит от длины большой полуоси и значения эксцентриситета орбиты. Для движения по круговой орбите $r=a$, поэтому

$$v_{кр} = \sqrt{\frac{\mu}{r}}. \tag{343}$$

Интеграл площади и уравнение Кеплера. Теперь умножим векторно обе части дифференциального уравнения (334) на $\bar{r}$. Получим

$$[\bar{r} \times \ddot{\bar{r}}] = \left[-\mu \bar{r} \times \frac{\bar{r}}{r^3}\right] = 0, \tag{344}$$

но

$$\frac{d}{dt}[\bar{r} \times \dot{\bar{r}}] = [2\bar{r} \times \ddot{\bar{r}}]. \tag{345}$$

Поэтому в результате интегрирования будем иметь

$$[\bar{r} \times \dot{\bar{r}}] = \text{const} = \sqrt{\mu a (1 - e^2)}\, W. \tag{346}$$

Запишем выражение геоцентрического вектора $\bar{r}$ в орбитальных координатах:

$$\bar{r} = x_\omega \bar{P} + y_\omega \bar{Q}, \tag{347}$$

Аналогичным образом для вектора скорости получим

$$\dot{\bar{r}} = \dot{x}_\omega \bar{P} + \dot{y}_\omega \bar{Q}. \tag{348}$$

Тогда уравнение (346) будет иметь вид

$$\bar{r} \times \dot{\bar{r}} = (x_\omega \dot{y}_\omega - \dot{x}_\omega y_\omega) W = \sqrt{\mu_\oplus a (1 - e^2)}\, W, \tag{349}$$

т. е.

$$x_\omega \dot{y}_\omega - \dot{x}_\omega y_\omega = \sqrt{\mu_\oplus a (1 - e^2)}. \tag{350}$$

Из уравнения (350) следует, что площадь, описываемая радиусом-вектором ИСЗ в единицу времени, — величина постоянная, равная

$$\mu_\oplus \sqrt{a (1 - e^2)} = \mu_\oplus \sqrt{p}. \tag{351}$$

Уравнение (350) представляет собой, таким образом, математическую формулировку второго закона Кеплера (интеграл площади).

Поскольку в орбитальной системе координат

$$x_\omega = a(\cos E - e); \tag{352}$$

$$y_\omega = a\sqrt{1 - e^2} \sin E, \tag{353}$$

то уравнение (350) будет иметь вид

$$\sqrt{\mu_\oplus}\, a^{-3/2}\, dt = (1 - e \cos E)\, dE \tag{354}$$

или, если проинтегрировать (354) на интервале $(t-t_0)$, то

$$\sqrt{\mu}\, a^{-3/2} \int_{0}^{t} dt = \int_{0}^{t} (1 - e\cos E)\, dE, \tag{355}$$

т. е.

$$\sqrt{\mu}\, a^{3/2} (t - t_0) = E - e\sin E - (E_0 - e\sin E_0). \tag{356}$$

Полученное уравнение (356) — уравнение Кеплера, которое обычно записывают в другой форме:

$$M = E - e\sin E, \tag{357}$$

где $M = M_0 + n(t - t_0)$; $n = \sqrt{\mu_\oplus}\, a^{-3/2}$;

M — средняя аномалия; M_0 — средняя аномалия в начальную эпоху; n — среднее движение.

Если задано значение M, а требуется вычислить эксцентрическую аномалию E, то уравнение Кеплера является трансцендентным.

Рассмотрим наиболее простой способ решения уравнения Кеплера — метод простых итераций.

Положим, что в начальном приближении $E^{(0)} = M$.

Выразим эксцентриситет в градусной мере: $e^{(0)} = \rho^{(0)} e = 57{,}295\ 78^\circ e$.

Вычислим $E^{(1)}$ в первом приближении:

$$E^{(1)} = M + \rho^{(0)} e \sin M. \tag{358}$$

Выполним дальнейшие приближения:

$$\begin{aligned} E^{(2)} &= M + \rho^{(0)} e \sin E^{(1)}; \\ E^{3} &= M + \rho^{(0)} e \sin E^{(2)}; \\ &\cdots\cdots\cdots \\ E^{(k)} &= M + \rho^{(0)} e \sin E^{(k-1)}. \end{aligned} \tag{359}$$

Приближения будем продолжать до выполнения условия

$$|E^{(k)} - E^{(k-1)}| \leqslant |\varepsilon|, \tag{360}$$

где k — номер итерации; $|\varepsilon|$ — заданная точность вычислений. Итерационный процесс (359) сходится для любых значений e на интервале от 0,0 до 0,999 ..., но по мере увеличения значения e скорость сходимости замедляется.

§ 24. ВЫЧИСЛЕНИЕ КООРДИНАТ И СОСТАВЛЯЮЩИХ СКОРОСТИ ПРИ НЕВОЗМУЩЕННОМ ДВИЖЕНИИ ИСЗ

Пусть заданы начальные условия движения ИСЗ: a, e, Ω, ω, J и M для начальной эпохи t_0 Требуется вычислить координаты и составляющие скорости x_i, y_i, z_i, $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$ для момента фотографирования t_i.

Первый вариант.

1. $T = 2\pi \dfrac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu_\oplus}}$; $p = a(1 - e^2)$.

2. $n = \dfrac{360^\circ}{T^s}$.

3. $M^{(0)} = M_0^{(0)} + n(t_i - t_0)$.

4. $e^0 = 57{,}295\ 78^\circ e$.

5. $E_0^{(0)} = M^{(0)}$.

6. $$\left.\begin{aligned} E_1^{(0)} &= M^{(0)} + e^{(0)} \sin M^{(0)} \\ E_2^{(0)} &= M^{(0)} + e^{(0)} \sin E_{(1)}^{(0)} \\ &\cdots\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\cdots \\ E_k &= M^{(0)} + e^{(0)} \sin E_{(k-1)}^{(0)} \end{aligned}\right\} \text{итерации.}$$

7. $x_\omega = a(\cos E - e)$;

$y_\omega = a\sqrt{1 - e^2} \sin E$;

$r = a(1 - e \cos E)$.

8. $\dot{x}_\omega = -(\sqrt{\mu_\oplus a} \sin E)/r$;

9. $\dot{y}_\omega = (\sqrt{\mu_\oplus p} \cos E)/r$.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix},$$

где элементы c_{ik} вычисляют по формулам (325).

10.

$$\bar{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} x_\omega \\ y_\omega \\ 0 \end{bmatrix}.$$

11.

$$\dot{\bar{r}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \dot{x}_\omega \\ \dot{y}_\omega \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Второй вариант.

До 7-го пункта вычисления совпадают с аналогичными первого варианта.

7. $\vartheta = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}\right)$; $u = \omega + \vartheta$.

8. $x = r(\cos u \cos\Omega - \sin u \sin\Omega \cos J)$;

$y = r(\cos u \sin\Omega + \sin u \cos\Omega \cos J)$; $z = r \sin u \sin J$.

9. $v = \sqrt{\mu_\oplus}\sqrt{\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$;

$v_r = \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{p}}\, e \sin\vartheta$ — составляющая скорости по радиусу-вектору;

$v_n = \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{p}}(1 + e\cos\vartheta)$ — составляющая скорости по трансверсали.

10. $\dot{x} = v_r(\cos u \cos\Omega - \sin u \sin\Omega \cos J) -$

$- v_n(\sin u \cos\Omega + \cos u \sin\Omega \cos J)$;

$\dot{y} = v_r(\cos u \sin\Omega + \sin u \cos\Omega \cos J) -$

$- v_n(\sin u \sin\Omega - \cos u \cos\Omega \cos J)$;

$\dot{z} = v_r(\sin u \sin J) + v_n(\cos u \sin J)$.

Пример 12. Для начальной эпохи $t_0 = 0^h\,16^m\,25{,}449^s$ (UT 1) 6 января 1986 г. заданы элементы кеплеровой орбиты картографического ИСЗ: $a = 6\,700\,000$ м; $e = 0{,}035 = 2{,}005\,3523°$; $J = 81{,}1°$; $\omega = 32°$; $\Omega = 2^h\,15^m = 33{,}75°$; $M_0 = 4^h\,20^m = 65°$; $p = a(1-e^2) = 6\,691\,792{,}5$; $\mu_\oplus = 398\,600{,}5 \cdot 10^9$ м^3/с^2.

Требуется вычислить координаты x, y, z и составляющие скорости $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ для момента t_t фотографироваиия $t_t = 0^h\,26^m\,34{,}98^s$ 6 января 1986 г.

Решение. *Первый вариант.*

1. $t_t - t_0 = 609{,}531^s$

2. $T = 2\pi\frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu_\oplus}} = 5457{,}869\,4^s$.

3. $n = \frac{360°}{T} = 6{,}595\,9804 \cdot 10^{-2}$ °/с.

4. $M = 105{,}204\,54°$.

5. $E = 107{,}121\,03°$.

6. $x_\omega = -2\,206\,920{,}4$ м.

7. $y_\omega = 6\,399\,166{,}5$ м.

8. $r = 6\,769\,034{,}7$ м.

9. $\dot{x}_\omega = -7296{,}1602$ м/с.

10. $\dot{y}_\omega = -2246{,}1465$ м/с.

11. $v=7634{,}0767$ м/с.

$$C^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 6{,}595\,7841\cdot10^{-1} & -5{,}135\,0362\cdot10^{-1} & 5{,}488\,8111\cdot10^{-1} \\ 5{,}393\,1753\cdot10^{-1} & -1{,}853\,1701\cdot10^{-1} & -8{,}214\,5866\cdot10^{-1}; \\ 5{,}235\,3897\cdot10^{-1} & 8{,}378\,3754\cdot10^{-1} & 1{,}547\,1038\cdot10^{-1} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=C^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} x_\omega \\ y_\omega \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4\,741\,632{,}2 \\ -2\,376\,105{,}3 \\ 4\,206\,053{,}1 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dot{x}_\omega \\ \dot{y}_\omega \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3\,658{,}9853 \\ -3\,518{,}6979 \\ -5\,701{,}7296 \end{bmatrix}.$$

Второй вариант.

$\theta=109{,}02809°$.

$u=\omega+\theta=141{,}028\,09°$.

$x=-4\,741\,632{,}0$ м;

$y=-2\,376\,104{,}9$ м;

$z=4\,206\,053{,}4$ м;

$v_r=255{,}365\,62$ м/с;

$v_n=7\,629{,}8045$ м/с;

$\dot{x}=-3\,658{,}9858$ м/с;

$\dot{y}=-3\,518{,}6981$ м/с;

$\dot{z}=-5\,701{,}7296$ м/с.

Вычисление начальных условий движения в кеплеровой форме $[a, e, \Omega, \omega, J, M_0]_{t=t_0}$ по заданным координатам x_0, y_0, z_0 и составляющим скорости $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$ на начальную эпоху t_0

1. $|\bar{r}_0|=r_0=(x_0^2+y_0^2+z_0^2)^{1/2}$.

2. $$\bar{r}_0^0=\frac{1}{r_0}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} l_0 \\ m_0 \\ n_0 \end{bmatrix}.$$

3. $|\dot{\bar{r}}_0|=v_0=(\dot{x}_0^2+\dot{y}_0^2+\dot{z}_0^2)^{1/2}$.

4. $$\dot{\bar{r}}_0^0=\frac{1}{v_0}\begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dot{l}_0 \\ \dot{m}_0 \\ \dot{n}_0 \end{bmatrix}.$$

5. $a = (2/r_0 - v_0^2/\mu_\oplus)^{-1}$.

6. $n = \sqrt{\mu_\oplus}\, a^{-3/2}$.

7. $D_0 = x_0\dot{x}_0 + y\dot{y}_0 + z\dot{z}_0$.

8. $e\cos E_0 = 1 - r_0/a$.

9. $e\sin E_0 = D_0/\sqrt{\mu_\oplus a}$.

10. $e = [(e\sin E_0)^2 + (e\cos E_0)^2]^{1/2}$.

11. $E_0 = \operatorname{arctg}\left[\dfrac{e\sin E_0}{e\cos E_0}\right]$.

12. $M_0 = E_0 - e\sin E_0$.

13. $\dot{D}_0 = \mu_\oplus (e\cos E_0)/r_0$.

14. $$\bar{\mathbf{P}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_\oplus e}}(\dot{D}\bar{\mathbf{r}}_0^0 - D\dot{\bar{\mathbf{r}}}_0^0) = \frac{1}{\sqrt{\mu_\oplus e}}\left[\dot{D}\begin{pmatrix} l_0 \\ m_0 \\ n_0 \end{pmatrix} - D\begin{pmatrix} \dot{l}_0 \\ \dot{m}_0 \\ \dot{n}_0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= c_{11}\bar{\mathbf{e}}_x + c_{12}\bar{\mathbf{e}}_y + c_{13}\bar{\mathbf{e}}_z.$$

15. $p = a(1 - e^2)$.

16. $H_0 = r_0 - p$.

17. $\dot{H}_0 = D_0/r_0$.

18. $$\bar{\mathbf{Q}} = \frac{1}{e\sqrt{\mu_\oplus p}}(\dot{H}_0\bar{\mathbf{r}}_0 - H_0\dot{\bar{\mathbf{r}}}_0) = \frac{1}{e\sqrt{\mu_\oplus p}}\left[\dot{H}_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} - H_0\begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= c_{21}\bar{\mathbf{e}}_x + c_{22}\bar{\mathbf{e}}_y + c_{23}\bar{\mathbf{e}}_z.$$

19. $\bar{\mathbf{W}} = [\bar{\mathbf{P}} \times \bar{\mathbf{Q}}] = c_{31}\bar{\mathbf{e}}_x + c_{32}\bar{\mathbf{e}}_y + c_{33}\bar{\mathbf{e}}_z$.

20. $$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{22} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}.$$

21. $J = \arccos(c_{33})$.

22. $\Omega = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{c_{31}}{-c_{32}}\right)$.

23. $\omega = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{c_{13}}{c_{23}}\right)$.

Пример 13. Для эпохи $t_0=0^h\,16^m\,25{,}449^s$, UT 1 — 6 января 1986 г. заданы координаты $x_0=-1\,578\,235{,}9$; $y_0=153\,577{,}09$; $z_0=6\,414\,702{,}4$ и составляющие скорости $\dot{x}_0=-6321{,}1214$, $\dot{y}_0=-4447{,}6598$, $\dot{z}_0=-1189{,}4779$. Требуется вычислить a, e, Ω, ω, J, M_0, соответствующие эпохе t_0.

Решение.

$r_0=|\bar{r}_0|=6607\,784{,}8.$

$r_0=v_0=7820{,}0455.$

$a=6\,699\,999{,}6.$

$n=1{,}151\,215\,8\cdot10^{-3}.$

$D_0=1{,}663\,0154\cdot10^{9}.$

$e\cos E_0=1{,}376\,34\cdot10^{-2}.$

$e\sin E_0=3{,}218\,029\cdot10^{-2}.$

$e=3{,}500\,0032\cdot10^{-2}.$

$E_0=66{,}843\,769°.$

$M_0=64{,}999\,974°.$

$\dot{D}_0=830\,247{,}69.$

$$A_1=\frac{\dot{D}_0}{\sqrt{\mu_\oplus e}}=2{,}222\,821\,2\cdot10^{-1}.$$

$$A_2=\frac{D_0}{\sqrt{\mu_\oplus e}}=445{,}238\,93.$$

$p=6\,691\,792{,}1.$

$\dot{H}_0=r_0-p=251{,}675\,17.$

$$B_1=\frac{\dot{H}_0}{e\sqrt{\mu_\oplus p}}=1{,}392\,296\,8\cdot10^{-7}.$$

$H_0=-84\,007{,}3.$

$$B_2=\frac{H_0}{e\sqrt{\mu_\oplus p}}=-4{,}647\,383\cdot10^{-5}.$$

$a_1=A_1x_0-A_2\dot{x}_0=2\,463\,595{,}7;$

$a_2=A_1y_0-A_2\dot{y}_0=2\,014\,408{,}7;$

$a_3=A_1z_0-A_2\dot{z}_0=1\,955\,475{,}5.$

$$\nabla=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}=3\,735\,107{,}7.$$

$$c_{11}=\frac{a_1}{\nabla}=6{,}595\,782\,2\cdot10^{-1}.$$

$$c_{12}=\frac{a_{12}}{\nabla}=5{,}393\,174\,3\cdot10^{-1};$$

$$c_{13}=\frac{a_3}{\nabla}=5{,}235\,392\,5\cdot10^{-1};$$

$c_{21}=B_1x_0-B_2\dot{x}_0=-5{,}135\,0399\cdot10^{-1}$;

$c_{22}=B_1y_0-B_2\dot{y}_0=-1{,}853\,173\cdot10^{-1}$;

$c_{23}=B_1z_0-B_2\dot{z}_0=8{,}378\,3737\cdot10^{-1}$;

$c_{31}=c_{12}c_{23}-c_{22}c_{13}=5{,}488\,8118\cdot10^{-1}$;

$c_{32}=c_{13}c_{21}-c_{23}c_{11}=-8{,}214\,5877\cdot10^{-1}$;

$c_{33}=c_{11}c_{22}-c_{21}c_{12}=1{,}547\,104\cdot10^{-1}$;

$J=\arccos(c_{33})=81{,}1°$;

$\Omega=\operatorname{arctg}(c_{31}/-c_{32})=33{,}75°$;

$\omega=\operatorname{arctg}(c_{13}/c_{23})=32°$.

Сравнив результаты вычислений с данными примера 12, убеждаемся, что задача решена верно.

§ 25. ВОЗМУЩЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ИСЗ

Выше было рассмотрено движение ИСЗ в гравитационном поле сферической Земли с равномерным распределением масс.

Модель движения и основные формулы невозмущенного движения являются первым приближением в решении задачи определения реального движения ИСЗ. Реальное движение отличается от идеализированного движения в центральном поле вследствие наличия большого числа других сил, суммарное действие которых значительно меньше силы тяготения сферической Земли. Однако именно вследствие действия этих сил шесть элементов кеплеровой орбиты непрерывно изменяются, являясь сложными функциями времени.

К числу возмущающих факторов, приводящих к изменениям элементов кеплеровой орбиты во времени, относятся следующие:

отличие реального гравитационного поля Земли от гравитационного поля сферической Земли с равномерным распределением масс;

возмущающее действие Солнца, Луны и планет;

атмосферное торможение в верхних слоях атмосферы;

магнитное и тепловое поле Земли;

солнечное излучение;

действие заряженных и нейтральных частиц.

Для системы дифференциальных уравнений невозмущенного движения (333) выше были получены шесть их интегралов:

$$\begin{aligned}
x&=f_1(a,\ e,\ \Omega,\ \omega,\ J,\ M_0;\ t_i-t_0);\\
y&=f_2(a,\ e,\ \Omega,\ \omega,\ J,\ M_0;\ t_i-t_0);\\
z&=f_3(a,\ e,\ \Omega,\ \omega,\ J,\ M_0;\ t_i-t_0);\\
\dot{x}&=f_4(a,\ e,\ \Omega,\ \omega,\ J,\ M_0;\ t_i-t_0);\\
\dot{y}&=f_5(a,\ e,\ \Omega,\ \omega,\ J,\ M_0;\ t_i-t_0);\\
\dot{z}&=f_6(a,\ e,\ \Omega,\ \omega,\ J,\ M_0;\ t_i-t_0).
\end{aligned}\qquad(361)$$

По аналогии с невозмущенным кеплеровым движением, дифференциальные уравнения возмущенного движения формально следует записать в виде

$$\ddot{x}+\frac{\mu x}{r^3}=W_x;\quad \ddot{y}+\frac{\mu y}{r^3}=W_y;\quad \ddot{z}+\frac{\mu z}{r^3}=W_z, \tag{362}$$

где W_x, W_y и W_z — суммарные значения ускорений по осям инерциальной системы координат, обусловленные действием возмущающих сил.

Тогда решения этих дифференциальных уравнений будут следующими:

$$\begin{aligned}
&x=f_1[a(t), e(t), \Omega(t), \omega(t), M(t); t_i—t_0];\\
&y=f_2[a(t), e(t), \Omega(t), \omega(t), M(t); t_i—t_0];\\
&z=f_3[a(t), e(t), \Omega(t), \omega(t), M(t); t_i—t_0];\\
&\dot{x}=f_4[a(t), e(t), \Omega(t), \omega(t), M(t); t_i—t_0];\\
&\dot{y}=f_5[a(t), e(t), \Omega(t), \omega(t), M(t); t_i—t_0];\\
&\dot{z}=f_6[a(t), e(t), \Omega(t), \omega(t), M(t); t_i—t_0],
\end{aligned} \tag{363}$$

где элементы кеплеровой орбиты уже не постоянны, а являются некоторыми функциями времени.

Элементы $a(t)$, $e(t)$, ..., $M(t)$ называются мгновенными, и их совокупность определяет мгновенную орбиту. Если известны мгновенные элементы, то соответствующие им мгновенные координаты в любой момент можно вычислить по формулам задачи двух тел.

При невозмущенном движении элементы орбиты q_i ($i=1, 2, \ldots, 6$) сохраняют постоянные значения. Если подставить значения координат x, y, z из выражений (362) в уравнения (363), то получим три уравнения, которым должны удовлетворять шесть функций $q_i(t)$. Таким образом, мгновенные элементы возмущенного движения не определяются однозначно.

Отметим, что при невозмущенном движении

$$\dot{x}=\frac{\partial f_1}{\partial t};\quad \dot{y}=\frac{\partial f_2}{\partial t};\quad \dot{z}=\frac{\partial f_3}{\partial t}; \tag{364}$$

потребуем, чтобы мгновенные элементы удовлетворяли условиям:

$$\sum_1^6 \frac{\partial f_k}{\partial q_l}\frac{\partial q_l}{\partial t}=0, k=1, 2, \ldots, n. \tag{365}$$

Тогда формулы (364) можно применить для вычисления скорости и в случае возмущенного движения.

Мгновенные элементы, однозначно определяемые уравнениями (365) и (363), называются оскулирующими.

Таким образом, оскулирующими элементами для момента t называются такие элементы $q(t)$, которые позволяют вычислить

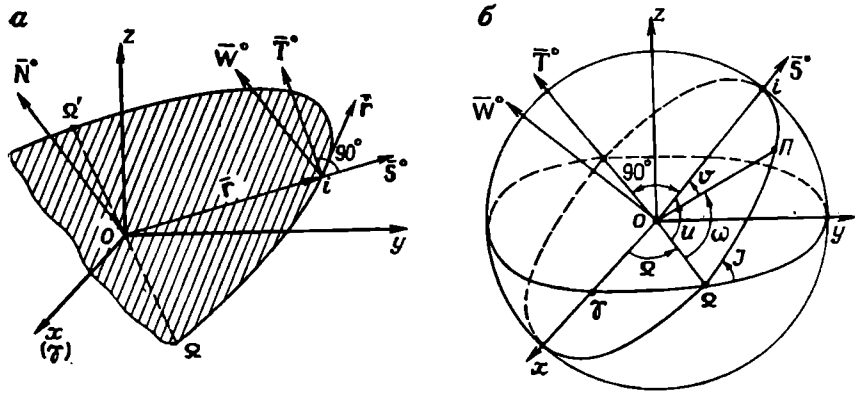

Рис. 18. Оскулирующая орбита (*а*) и подвижный трехгранник (*б*)

координаты и скорость по формулам невозмущенного движения.

Орбита, определяемая оскулирующими элементами в какой-либо момент t, называется оскулирующей, а момент t — эпохой оскуляции. Следовательно, оскулирующая орбита соответствует положению и скорости ИСЗ в момент t и может быть вычислена по формулам невозмущенного движения.

Наиболее эффективно использование оскулирующих элементов в том случае, когда возмущающие ускорения значительно меньше основного ускорения, создаваемого центральным телом. Именно такая ситуация возникает при возмущенном движении ИСЗ.

Приведем без вывода дифференциальные уравнения Ньютона, интегрирование которых позволяет получить оскулирующие элементы орбиты. С этой целью разложим возмущающее ускорение $\bar{W}$ на три составляющие. Плоскость оскулирующей орбиты задается вектором положения $\bar{r}(t)$ и вектором скорости $\dot{\bar{r}}(t)$ (рис. 18,*а*).

Введем подвижную систему координат $iSTW$ (рис. 18,*б*).

Ось iS направим по радиусу-вектору $\bar{r}_i$ положения ИСЗ на орбите.

Ось iT расположим в плоскости орбиты перпендикулярно к оси iS так, чтобы направление iT совпадало с направлением оси oy инерциальной системы координат.

Ось iW направим по нормали к плоскости орбиты, так, чтобы векторы $\bar{S}^0$, $\bar{T}^0$ и $\bar{W}^0$ составляли ортогональную связку правой ориентации.

Направления iS, iT и iW называются соответственно направлениями по радиусу-вектору, по трансверсали и бинормали. Тогда проекции возмущающего ускорения W_x, W_y и W_z на оси инерциальной системы координат будут связаны с S, T и W ортогональным преобразованием

$$\begin{bmatrix} S \\ T \\ W \end{bmatrix} = \mathbf{D} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}, \tag{366}$$

где элементы ортогональной матрицы $\mathbf{D}\,[d_{ik}]$ имеют вид:

$$d_{11} = \cos u \cos\Omega - \sin u \sin\Omega \cos J; \quad d_{12} = \cos u \sin\Omega + \sin u \cos\Omega \cos J; \quad d_{13} = \sin u \sin J;$$

$$d_{21} = -\sin u \cos\Omega - \cos u \sin\Omega \cos J; \quad d_{22} = -\sin u \sin\Omega + \cos u \cos\Omega \cos J; \quad d_{23} = \cos u \sin J;$$

$$d_{31} = \sin\Omega \sin J; \quad d_{32} = -\cos\Omega \sin J; \quad d_{33} = \cos J.$$

Такое представление соответствует стандартному виду матрицы **D** с той разницей, что угол ω заменен на аргумент широты u.

Введем обозначения:

$$S' = \sqrt{\frac{p}{\mu}}\, S; \quad T' = \sqrt{\frac{p}{\mu}}\, T; \quad W' = \sqrt{\frac{p}{\mu}}\, W. \tag{367}$$

Тогда уравнения Ньютона можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= 2a^2 \left(e \sin\vartheta S' + \frac{p}{r} T' \right); \\
\frac{de}{dt} &= p \sin\vartheta S' + p (\cos\vartheta + \cos E) T'; \\
\frac{d\Omega}{dt} &= r \sin u \operatorname{cosec} J W'; \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{1}{e} [-p \cos\vartheta S' + (r + p) \sin\vartheta T'] - \cos J \frac{d\Omega}{dt}; \\
\frac{dJ}{dt} &= r \cos u W'; \\
\frac{dM_0}{dt} &= \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e} [(p \cos\vartheta - 2er) S' - (r + p) \sin\vartheta T'].
\end{aligned} \tag{368}$$

После интегрирования системы (368) среднюю аномалию вычисляют по формулам:

$$n = \sqrt{\mu}\, a^{-3/2}; \quad M = M_0 + \int_{t_0}^{t} n dt. \tag{369}$$

Если эксцентриситет орбиты мал, то уравнения для $\frac{de}{dt}$ и $\frac{d\omega}{dt}$ заменяют на следующие:

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = \left[-S' \cos u + T' \left(1 + \frac{r}{p} \sin u \right) + \right.$$

$$+\frac{r}{p}(\lambda_1 T' - \lambda_2 W' \operatorname{ctg} J \sin u)\Big]; \tag{370}$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = \left[S' \sin u + T'\left(1+\frac{r}{p}\right)\cos u + \frac{r}{p}(\lambda_2 T' + \lambda_1 W' \operatorname{ctg} J \sin u)\right]. \tag{371}$$

При этом радиус-вектор связан с λ_1 и λ_2 соотношением

$$r = \frac{p}{1+\lambda_1 \sin u + \lambda_2 \cos u}; \tag{372}$$

а величины λ_1 и λ_2 определяются формулами

$$\lambda_1 = e \sin \omega; \quad \lambda_2 = e \cos \omega \tag{373}$$

$$e = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \omega = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \tag{374}$$

Заметим, что истинная аномалия ϑ связана с моментом времени t уравнением

$$t - t_n = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \int_{\vartheta=0}^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{(1+e\cos\vartheta)^2}. \tag{375}$$

Система (368) интегрируется любым численным методом с начальными условиями a_0, λ_1^0, λ_2^0, Ω_0, J_0, M_0^0 для малых эксцентриситетов, а значения элементов в момент времени t вычисляют по формулам:

$$a = a_0 + \Delta a; \ \lambda_1 = \lambda_1^0 + \Delta\lambda_1; \ \lambda_2 = \lambda_2^0 + \Delta\lambda_2;$$
$$\Omega = \Omega_0 + \Delta\Omega; \ J = J_0 + \Delta J; \ M_0 = M_0^0 + \Delta M_0, \tag{376}$$

где Δa, $\Delta\lambda_1$, $\Delta\lambda_2$, $\Delta\Omega$, ΔJ и ΔM_0 — изменения элементов в результате интегрирования системы уравнений Ньютона (368).

§ 26. ВОЗМУЩЕНИЯ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ОТЛИЧИЕМ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ ОТ ЦЕНТРАЛЬНОГО

Осесимметрическое гравитационное поле. В одном весьма важном для практики случае уравнения Ньютона могут быть упрощены. Положим, что силы, действующие на ИСЗ в полете, обладают потенциалом V. Тогда в соответствии с определением потенциала должны выполняться равенства:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = F_x; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = F_y; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = F_z, \tag{377}$$

Таким образом, потенциал — такая функция, производные от которой по инерциальным координатам равны составляющим силы F по соответствующим осям.

Потенциал $V_{сф}$, создаваемый силой тяготения сферической Земли, соответствующий невозмущенному движению, определяется по формуле

$$V_{сф} = \frac{\mu}{r}. \tag{378}$$

Предположим, что математическая модель, аппроксимирующая потенциал реальной Земли, имеет осевую симметрию. В этом случае экватор и параллели будут окружностями, а меридиональные сечения — одинаковыми замкнутыми кривыми, близкими к эллипсу, конфигурация которых зависит от распределения масс в теле осесимметрической Земли.

Осесимметрический потенциал Земли можно представить в виде следующего бесконечного ряда:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{r}\sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{a_e}{r}\right)^n P_n(\sin\delta); \\ V - V_{сф} &= -\frac{\mu}{r}\sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{a_e}{r}\right)^n P_n(\sin\delta), \end{aligned} \tag{379}$$

где J_n — постоянные, характеризующие потенциал; a_e — экваториальный радиус Земли; r — геоцентрический радиус-вектор ИСЗ, а $P_n(\sin\delta)$ — полиномы Лежандра по $\sin\delta$ порядка n. При этом геоцентрическое склонение δ ИСЗ равно геоцентрической широте Ф, которая связана с геодезической широтой формулой

$$\operatorname{tg}\Phi = (1-\tilde{e}^2)\operatorname{tg} B, \tag{380}$$

где $\tilde{e}$ — эксцентриситет общего земного эллипсоида.

Введем обозначение $t = \sin\Phi = \sin\delta$, тогда первые семь полиномов Лежандра определятся формулами:

$$\begin{aligned} P_0(t) &= 1; & P_3(t) &= \frac{1}{2}(5t^3 - 3t); \\ P_1(t) &= t; & P_4(t) &= \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3); \\ P_2(t) &= \frac{1}{2}(3t^2 - 1); & P_5(t) &= \frac{1}{8}(69t^5 - 70t^3 + 15t); \\ & & P_6(t) &= \frac{1}{16}(231t^6 - 315t^4 + 105t^2 - 5). \end{aligned} \tag{381}$$

Дальнейшие вычисления можно продолжить по рекуррентной формуле

$$(2n+1)tP_n(t) = (n+1)P_{n+1}(t) + nP_{n-1}(t). \tag{382}$$

В нашем случае суммирование членов ряда (379) начинается с $n=2$, поскольку предполагается, что начало координат совпадает с центром масс Земли.

Коэффициенты $J_2, \ldots, J_n$, входящие в выражение (379), называются коэффициентами зональных гармоник, а сами члены разложения (382) — зональными гармониками.

Определяющее значение имеет коэффициент J_2 при второй зональной гармонике, который задает динамическое сжатие Земли. Остальные коэффициенты на три порядка меньше:

$$J_2 = 108\,263 \cdot 10^{-8};$$
$$J_3 = 254 \cdot 10^{-8};$$
$$J_4 = 161 \cdot 10^{-8};$$
$$J_5 = 23 \cdot 10^{-8};$$
$$J_6 = 55 \cdot 10^{-8}.$$

Разность $(V - V_{\text{сф}})$ будем обозначать R, т. е.

$$R = -\frac{\mu}{r}\sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{a_e}{r}\right)^n P_n(\sin\delta). \tag{383}$$

Величину R называют пертурбационной функцией (возмущающей функцией), которая вызывает изменения кеплерова эллипса во времени.

Если силы, действующие на спутник, удовлетворяют уравнениям (377), т. е. являются потенциальными, то в этом случае проекции возмущающего ускорения $\bar{S}^0$, $\bar{T}^0$, $\bar{W}^0$ в уравнениях Ньютона (368) могут быть выражены через частные производные функции по элементам. В этом случае возникает система дифференциальных уравнений Лагранжа:

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial M};\\
\frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial \omega};\\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial \omega};\\
\frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial J} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e};\\
\frac{dJ}{dt} &= \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}\frac{\partial R}{\partial \omega};\\
\frac{dM}{dt} &= n - \frac{1-e^2}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a}.
\end{aligned} \tag{384}$$

Для того чтобы выполнить интегрирование уравнений Лагранжа, необходимо выразить пертурбационную функцию R как функцию элементов кеплеровой орбиты.

С этой целью рассмотрим геоцентрическую сферу единичного радиуса (рис. 19), на которой большой круг $\Omega i\Omega'$ является следом орбиты. Из сферического прямоугольного треугольника Ωiq получим

$$\sin\delta = \sin J \sin(\omega + \vartheta) = t. \tag{385}$$

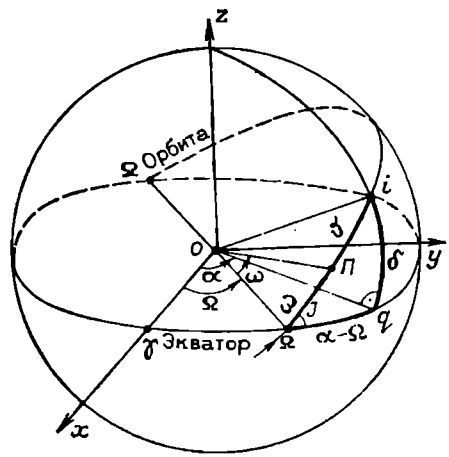

Рис. 19. Треугольник «экватор — орбита — круг склонений»

Воспользуемся разложением R с учетом членов до четвертого порядка по формулам (381):

$$R = -\frac{\mu}{r}\left[J_2\frac{a_e^2}{r^2}\,\frac{1}{2}(3t^2-1) + J_3\frac{a_e^3}{r^3}\,\frac{1}{2}(5t^3-3t) + \right.$$

$$\left. + J_4\frac{a_e^4}{r^4}\,\frac{1}{8}(35t^4-30t^2+3)\right]. \tag{386}$$

Подставив в выражение (386) значение t из формулы (385) с учетом того, что

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\vartheta}, \tag{387}$$

после элементарных преобразований получим

$$R = \mu\left\{\frac{3}{2}J_2\left(\frac{a_e}{a}\right)^3\frac{1}{r^3}\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\sin^2 J+\frac{1}{2}\sin^2 J\cos 2(\vartheta+\omega)\right]-\right.\right.$$

$$-J_3\left(\frac{a_e}{a}\right)^4\frac{1}{r^4}\left[\left(\frac{15}{8}\sin^2 J-\frac{3}{2}\right)\sin(\vartheta+\omega)-\right.$$

$$\left.-\frac{5}{8}\sin^2 J\sin 3(\vartheta+\omega)\right]\sin J - \frac{35}{8}J_4\left(\frac{a_e}{a}\right)^5\frac{1}{r^5}\left[\frac{3}{35}-\frac{3}{7}\sin^2 J+\right.$$

$$+\frac{3}{8}\sin^4 J+\sin^2 J\left(\frac{3}{7}-\frac{1}{2}\sin^2 J\right)\cos 2(\vartheta+\omega)+$$

$$\left.\left.+\frac{1}{8}\sin^4 J\cos 4(\vartheta+\omega)\right]\right\}. \tag{388}$$

Поскольку эволюция элементов орбиты ИСЗ в основном зависит от первого, основного члена разложения пертурбационной

функции R, определяемой формулой (388), то запишем его отдельно:

$$R(J_2) = \mu \left\{ \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{a_e}{r} \right)^3 \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \sin^2 J + \frac{1}{2} \sin^2 J \cos 2(\vartheta + \omega) \right] \right\}. \tag{389}$$

Если теперь найти производные от $R(J_2)$ по элементам, подставить их в уравнения Лагранжа и выполнить интегрирование, то получим математическую модель движения ИСЗ в гравитационном поле сжатой Земли.

При этом некоторые элементы орбиты (ω, Ω, M_0) содержат вековые возмущения, т. е. постоянно убывают или, наоборот, возрастают, а также одновременно испытывают и периодические возмущения, т. е. колеблются около своих значений в начальную эпоху. Другие же элементы (a, J, e) имеют лишь периодические возмущения.

Сами периодические возмущения подразделяются на короткопериодические и долгопериодические. Долгопериодические возмущения, вызванные сжатием Земли, обусловлены вековыми возмущениями аргумента перицентра ω, поскольку тригонометрические функции ω изменяются с периодом 2π. На долгопериодические возмущения накладываются короткопериодические, которые определяются тригонометрическими функциями линейных комбинаций M или ϑ и ω.

Наибольший интерес представляют вековые возмущения первого порядка от второй зональной гармоники.

Формулы для этих возмущений, полученные Козаи, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&a = a_0; \quad e = e_0; \quad J = J_0; \\
&\bar{n} = n_0 \left[1 + \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{a_e}{p} \right)^2 \sqrt{1 - e^2} \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 J \right) \right]; \\
&M = M_0 + \bar{n}(t - t_0); \\
&\Omega = \Omega_0 - \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{a_e}{p} \right)^2 \cos J \, \bar{n}(t - t_0) = \Omega_0 + \dot{\Omega}(t - t_0); \\
&\omega = \omega_0 + \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{a_e}{p} \right)^2 \left(2 - \frac{5}{2} \sin^2 J \right) \bar{n}(t - t_0) = \omega_0 + \dot{\omega}(t - t_0).
\end{aligned} \tag{390}$$

Анализ формул (390) позволяет сделать ряд важных выводов об общей эволюции орбит ИСЗ во времени.

1. Элементы a, e и J вообще не имеют вековых возмущений первого порядка, обусловленных сжатием Земли.

2. Сжатие Земли вызывает вековые уходы долготы восходящего узла Ω, аргумента перицентра ω и средней аномалии. Исключением являются орбиты с так называемым критическим на-

клонением. Как следует из формулы для ω (390), наклонение J таких орбит $J=\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}\approx 63{,}43°$. Аргумент перицентра орбит с наклонением $J=63{,}43°$ не испытывает вековых возмущений.

3. Вековое движение узла орбиты (прецессия) происходит так, что линия узлов непрерывно отступает, вращаясь в сторону, противоположную движению спутника.

Прямым движением ИСЗ называется движение спутника от оси *ox* к оси *oy*, если смотреть со стороны положительного направления оси *oz*.

При прямом движении спутник, совершив один оборот, будет всегда пересекать экватор западнее, чем раньше, если даже предположить, что Земля не вращается. Происходит регрессия (отступление) восходящего узла. При обратном движении спутника узел отступает с запада на восток. Для круговых орбит, близких к экваториальным (наклонение $J\approx 0{,}0°$), скорость регрессии максимальна. Например, для низких орбит регрессия составляет 0,6° по экватору за виток, т. е. примерно 9,0° в сутки. При этом спутник смещается за один виток на 34 км в направлении нормали к плоскости орбиты.

4. Вековое движение аргумента перицентра вызывает непрерывное вращение большой полуоси в плоскости орбиты. При наклонениях J, меньших критического 69,43°, перигей смещается в направлении движения спутника, а при наклонениях, бо́льших критического, — в противоположном.

5. Вековые возмущения, обусловленные сжатием, в основном определяют эволюцию орбит ИСЗ, поскольку остальные члены пертурбационной функции R в несколько сот раз меньше основного члена разложения, содержащего J_2.

Реальное гравитационное поле. До сих пор мы предполагали, что гравитационное поле Земли обладает осевой симметрией. Однако в действительности имеют место эллиптичность экватора и другие менее значительные эффекты, которые приводят к тому, что реальное гравитационное поле не обладает осевой симметрией. Более общая форма потенциала для несимметрической относительно полярной оси планеты имеет вид

$$V=\frac{\mu}{r}\left[1-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a_e}{r}\right)^n J_n P_n(\sin\delta)+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{a_e}{r}\right)^n (C_{nm}\cos mL+S_{nm}\sin mL)\,P_{nm}(\sin\delta)\right]. \qquad (391)$$

В формуле (391) члены под знаком двойного суммирования называются тессеральными гармониками, а постоянные C_{nm} и

S_{nm} — мерами амплитуд соответствующих тессеральных гармоник. В выражения для тессеральных гармоник входят тригонометрические функции долготы $\cos mL$ и $\sin mL$, поскольку гравитационное поле уже не является осесимметрическим. Величины $P_{nm}(\sin\delta)$ — присоединительные функции Лежандра. При $m=0$ предполагается осевая симметрия потенциала.

Тессеральные гармоники имеют малые амплитуды и в первом приближении не вызывают вековых возмущений, вызывая лишь периодические возмущения элементов орбиты спутника.

§ 27. ВОЗМУЩЕНИЯ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ТОРМОЖЕНИЕМ АТМОСФЕРЫ

Картографические и ресурсные ИСЗ имеют низкие орбиты с высотой перицентра $h_п=300\div350$ км, и поэтому их орбиты испытывают значительные атмосферные возмущения. Действие атмосферы приводит к вековым возмущениям элементов орбит.

При движении по близкой к круговой орбите спутник вследствие сопротивления атмосферы теряет свою энергию и непрерывно спускается по спирали, но каждый ее виток мало отличается от окружности. Период обращения уменьшается. Ниже 110—120 км плотность атмосферы резко возрастает, спутник не может завершить последний виток (рис. 20), и почти отвесно падает. В еще более плотных слоях атмосферы, он сгорает, если не приняты меры для его защиты (сгорание происходит на орбите высотой 110—120 км с периодом обращения $\approx$5200 с).

Спускаясь по спирали, ИСЗ каждый раз оказывается на более низкой круговой орбите, и его орбитальная скорость возрастает. При этом направление тангенциального ускорения спутника противоположно направлению силы сопротивления атмосферы. На первый взгляд это кажется совершенно невероятным. Указанное явление называется аэродинамическим парадоксом спутника.

Причина аэродинамического парадокса заключается в том, что движение под действием торможения атмосферы происходит не по окружности, а по спирали. Полное ускорение $\bar{a}$ является равнодействующей гравитационного ускорения $\bar{a}_g$ и ускорения сопротивления атмосферы $\bar{a}_c$ (рис. 21). При этом полное ускорение $\bar{a}$ можно представить в виде тангенциальной $\bar{a}_t$ и нормальной $\bar{a}_n$ (перпендикулярной к орбите) составляющих. При этом ускорение сопротивления атмосферы $\bar{a}_c$ равно по модулю тангенциальной составляющей полного ускорения a_t.

При спуске ИСЗ его полная механическая энергия вследствие сопротивления атмосферы убывает, поскольку уменьшение потенциальной энергии происходит быстрее, чем увеличение кинетической.

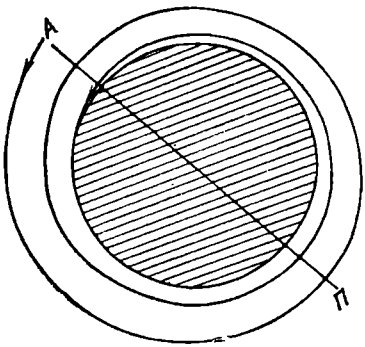

Рис. 20. Траектория движения спутника в атмосфере

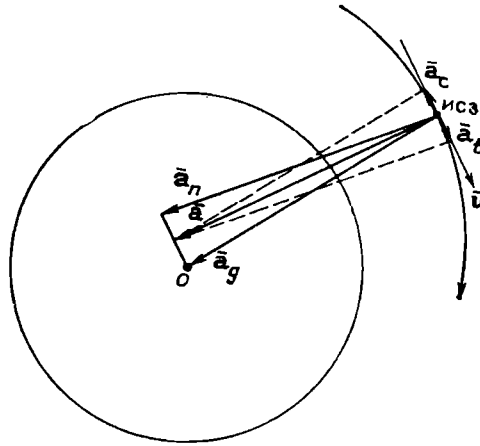

Рис. 21. Схема полного ускорения ИСЗ

Для получения достаточно отчетливой картины влияния атмосферного торможения на движение ИСЗ будем считать Землю невращающейся сферой с потенциалом μ/r.

При изучении влияния атмосферы на движение ИСЗ существенное значение имеют форма ИСЗ и плотность атмосферы ρ. Не имея данных об ориентации ИСЗ и плотности атмосферы, невозможно точно предсказать изменения элементов орбиты.

Будем рассматривать движение ИСЗ с пренебрежимо малой массой m, на который действует сила сопротивления атмосферы, направленная противоположно вектору геоцентрической скорости.

Сила F сопротивления атмосферы определяется выражением

$$F = \frac{1}{2m} C_D A \rho v^2, \qquad (392)$$

где C_D — аэродинамический коэффициент сопротивления; A — площадь поперечного сечения ИСЗ; v — скорость ИСЗ; ρ — плотность атмосферы. Значение коэффициента C_D примем равным коэффициенту C_D для сферы. Из теории сопротивления тел молекулярному потоку газа известно, что C_D для сферы составляет $2{,}1 \div 2{,}15$.

Наиболее сложной проблемой является создание адекватных моделей атмосферы, поскольку плотность атмосферы ρ является функцией высоты полета, расположения Солнца относительно перигея орбиты, географической широты ИСЗ, солнечной активности и вращения Солнца вокруг своей оси. Для высот перигея более 300 км плотность атмосферы зависит от того, на дневной или ночной стороне находится перигей. Главной причиной изменения плотности атмосферы является ее разогревание в результате

поглощения солнечной электромагнитной радиации, помимо этого, на плотность атмосферы влияют геомагнитные бури и целый ряд других трудноучитываемых факторов. В настоящее время существует несколько моделей атмосферы, которые позволяют удовлетворительно прогнозировать движения ИСЗ при условии, что орбитальные дуги, на которых выполняется прогноз, невелики и плотно заполнены орбитальными измерениями. Поэтому учет сопротивления атмосферы является наиболее сложной частью прогноза движения картографических и ресурсных ИСЗ.

Наиболее часто для аппроксимации плотности атмосферы ρ используют показательную функцию:

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{h-h_0}{H}}, \tag{393}$$

где ρ_0 — значение плотности на некоторой фиксированной высоте h_0; e — основание натуральных логарифмов; H — высота однородной атмосферы, которая определяется по формуле

$$H = \frac{kT}{mg}. \tag{394}$$

В выражении (394) T — температура в градусах Кельвина; m — молекулярный вес; k — постоянная Больцмана.

Величину H можно трактовать как высоту, на которую необходимо подняться относительно h_0, чтобы плотность атмосферы уменьшилась в e раз.

Постоянной величину H можно считать при условии постоянства температуры и однородном молекулярном составе воздуха. Но в действительности с изменением высоты меняются и температура, и молекулярный состав воздуха. Поэтому удобнее использовать зависимость

$$\ln\rho = \bar{a}_0 - \chi\sqrt{h-h_0}, \tag{395}$$

где h — высота над уровнем моря, а $\bar{a}_0$; χ и h_0 — постоянные для принятой модели атмосферы.

Дальнейший анализ возмущений, вызванных сопротивлением атмосферы, заключается в следующем.

Так как сила F сопротивления атмосферы не имеет потенциала, то исходными дифференциальными уравнениями будут уравнения Ньютона (368). Разложив силу F сопротивления атмосферы на составляющие по осям S', T' и W' подвижного триэдра и выполнив интегрирование уравнений Ньютона, в результате довольно сложных выкладок получают следующие результаты.

В уравнения для a и e (если принять, что в первом приближении их значения в правых частях уравнений Ньютона постоянны) входит вековой член, что указывает на вековые изменения a и e.

Долгота восходящего узла Ω и наклонение J (в рамках принятых допущений) не содержат возмущений, вызванных сопротивлением атмосферы. При этом

$$\frac{dJ}{dt} = 0; \quad \frac{d\Omega}{dt} = 0.$$

Средняя аномалия и аргумент перицентра испытывают лишь периодические возмущения с малой амплитудой, вследствие малости величины $\left(\frac{A}{m}\right) C_D \rho$. Таким образом, анализ показывает, что основной вклад в эволюцию элементов орбиты под влиянием торможения атмосферы вносят вековые уменьшения большой полуоси и эксцентриситета. При этом вековые возмущения Δa и Δe за один оборот ИСЗ вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \Delta a &= -\left(\frac{A}{m}\right) C_D a^2 \int_0^{2\pi} \frac{\rho(1+e\cos E)^{3/2}}{(1+e\cos E)^{1/2}}\, dE; \\ \Delta e &= -\left(\frac{A}{m}\right) C_D a \int_0^{2\pi} \frac{\rho(1+e\cos E)^{1/2}}{(1-e\cos E)^{1/2}} (1-e^2)\cos E dE. \end{aligned} \tag{396}$$

Интегралы (396) вычисляются численными методами, например, с помощью обобщенных формул Симпсона.

Разумеется, что сделанные выводы характеризуют эволюцию орбиты лишь в самом первом, довольно грубом приближении, поскольку не учитывались сплюснутость атмосферы, несферичность Земли, вращение Земли, различие между скоростью вращения атмосферы и скоростью ИСЗ и периодические изменения плотности атмосферы.

§ 28. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ИСЗ

В настоящее время в связи с широким внедрением современных ЭВМ, обладающих большим быстродействием и объемами оперативной и постоянной памяти, интегрирование уравнений движения ИСЗ выполняется численными методами. В результате их применения получают таблицы числовых значений элементов орбит или координат и составляющих вектора скорости для равноотстоящих, как правило, значений независимой переменной. Численные методы особенно выгодно использовать, когда интервал времени $t_j - t_0$ невелик. При бо́льших интервалах времени более удобны аналитические методы интегрирования. Они позволяют получить интегралы в буквенном виде, т. е. в виде формул, предписывающих выполнение системы операций, при помощи которой

решения могут быть получены для любых значений независимой переменной t.

При численном интегрировании дифференциальных уравнений движения в инерциальной системе координат их записывают в следующем виде:

$$\begin{aligned} v_x &= -\frac{\mu x}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial x} + Q_x; \quad \dot{x} = v_x; \\ v_y &= -\frac{\mu y}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial y} + Q_y; \quad \dot{y} = v_y; \\ v_z &= -\frac{\mu z}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial z} + Q_z; \quad \dot{z} = v_z. \end{aligned} \tag{397}$$

Благодаря этой форме записи понижается порядок системы и вместо системы трех нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка интегрируется система шести дифференциальных уравнений первого порядка.

В уравнениях (397) $\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial R}{\partial y}$ и $\frac{\partial R}{\partial z}$ — производные от пертурбационной функции R по инерциальным координатам. Причем на основании формулы (391) пертурбационная функция имеет вид

$$R = -\frac{\mu}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a_e}{r}\right)^n J_n P_n(\sin\delta) + \\ + \frac{\mu}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{a_e}{r}\right)^n (C_{nm}\cos mL + S_{nm}\sin mL)\, P_{nm}(\sin\delta). \tag{398}$$

Q_x, Q_y и Q_z — составляющие ускорения, вызванного сопротивлением атмосферы по осям инерциальной системы координат.

Численное интегрирование уравнений движения может быть выполнено с использованием одношаговых или многошаговых методов. В одношаговых методах для получения решения, соответствующего некоторому моменту времени t_i, необходимо располагать только начальными условиями x_0, y_0, z_0 и $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$ на начальную эпоху t_0. При использовании многошаговых методов должны быть известны значения координат и составляющих скорости для ряда равноотстоящих моментов t_0, $t_1 = t_0 + \Delta t$, $t_2 = t_0 + 2\Delta t, \ldots, t_k = t_0 + k\Delta t$, дальнейшие вычисления производят с помощью интерполяционных формул различного типа.

Запишем исходную систему уравнений (397) в виде

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(x_1, x_2, \ldots, x_6, t) \quad (j = 1, 2, \ldots, 6) \tag{399}$$

с начальными условиями:

$$x_1(t_0) = x_{0_1},\ x_2(t_0) = x_{0_2};\ldots;\ x_6(t_0) = x_{0_6}. \tag{400}$$

Основным одношаговым методом для интегрирования выражений (400) является метод Рунге—Кутта. Формулы, которые приводятся ниже, позволяют определить координаты и составляющие скорости для некоторого момента $t_{i+1}=t_i+h$, если на момент t_i они известны с точностью до h^4, где h — произвольный шаг интегрирования:

$$\begin{aligned}
&x_j^{(i+1)} = x_j^{(i)} + \frac{1}{6}h(P_j^{(i)} + 2q_j^{(i)} + 2r_j^{(i)} + s_j^{(i)});\\
&P_j^{(i)} = f_j(x_1^{(i)},\ x_2^{(i)},\ldots,\ x_6^{(i)},\ t_i);\\
&q_j^{(i)} = f_j\left(x_1^{(i)} + \frac{1}{2}hp_1^{(i)},\ x_2^{(i)} + \frac{1}{2}hp_2^{(i)},\ldots,\ x_6^{(i)} + \right.\\
&\left. + \frac{1}{2}hp_6^{(i)},\ t_i + \frac{1}{2}h\right);\\
&r_j^{(i)} = f_j\left(x_1^{(i)} + \frac{1}{2}hq_1^{(i)},\ x_2^{(i)} + \frac{1}{2}hq_2^{(i)},\ldots,\ x_6^{(i)} + \right.\\
&\left. + \frac{1}{2}hp_6^{(i)},\ t_i + \frac{1}{2}h\right);\\
&s_j^{(i)} = f_j(x_1^{(i)} + hr_1^{(i)},\ x_2^{(i)} + hr_2^{(i)},\ldots,\ x_6^{(i)} + hr_6^{(i)},\ t_i + h);\\
&x_j^{(i)} = x_j(t_i)\ (i = 1,\ 2,\ 3,\ldots,\ 6).
\end{aligned} \tag{401}$$

Приведенная система формул соответствует методу Рунге — Кутта четвертого порядка при интегрировании системы уравнений движения x_0, y_0, z_0, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$ для t_0. Сравнение результатов интегрирования назад с заданными начальными условиями характеризует точность решения. Иногда оценку точности выполняют путем варьирования начальных условий в пределах допустимой погрешности. По вариациям координат, полученным после интегрирования, судят о точности решения.

К настоящему времени разработано множество модификаций метода Рунге — Кутта, каждая из которых имеет свои достоинства и недостатки. Одной из них является модификация, предложенная Э. Эверхартом, получившая широкое применение при интегрировании уравнений движения ИСЗ. В методе Эверхарта применяется специальный способ разбиения основного шага на подшаги, которое является оптимальным (разбиение Гаусса — Радо). Коэффициенты разложения по степеням шага уточняются методом последовательных приближений. В алгоритме Эверхарта можно задать максимальную степень шага в разложениях. Алгоритм позволяет выполнять вычисления с очень высокой точно-

стью, на два порядка превышающей точность метода Рунге — Кутта четвертого порядка. При этом время счета, число шагов и количество вычислений правых частей уменьшаются по крайней мере на порядок.

Здесь мы рассмотрели в основных чертах одношаговые методы, но существуют и совершенствуются многошаговые (разностные) методы численного интегрирования (метод Адамса, метод Коуэлла, метод Энке и другие), которые используются в сочетании с одношаговыми. При этом сначала с помощью одношаговых методов получают значения переменных $x(t_i)$ для ряда равноотстоящих значений t_i, а затем применяются интерполяционные формулы.

Глава V
КООРДИНАТНО-ВРЕМЕННАЯ ПРИВЯЗКА ТОЧЕК КОСМИЧЕСКИХ СНИМКОВ ПРИ ИЗВЕСТНЫХ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ИСЗ

§ 29. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ КООРДИНАТ ИСЗ НА МОМЕНТ ФОТОГРАФИРОВАНИЯ

Рассмотрим методику координатно-временной привязки отдельных точек, дешифрируемых на топографических снимках, предположив, что начальные условия $(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)_{t=t_0}$ с необходимой точностью определены по данным наземных координатно-измерительных комплексов.

В этом случае порядок обработки будет следующим.

1. Минимум на двух перекрывающихся топографических снимках идентифицируется положение определяемой точки j (рис. 22).

2. Измеряются координаты точки j в системах координат i-го и k-го снимков.

3. Из обработки звездных снимков, полученных в моменты t_i и t_k, определяются операторы $\mathbf{\Pi}_i^*$ и $\mathbf{\Pi}_k^*$ ориентации звездных снимков в моменты съемки.

4. По значениям моментов t_i и t_k, зафиксированным бортовой службой времени, и величине оператора $\mathbf{\Pi}_0$ взаимной ориентации топографического и звездного снимков находят спутникоцентрические векторы точки j:

$$\bar{\mathbf{R}}_{ij}^0 = \frac{1}{\Delta_{ij}} \mathbf{S}_i \mathbf{\Pi}_i^* \mathbf{\Pi}_0 \begin{bmatrix} \tilde{x}_{ij} \\ \tilde{y}_{ij} \\ -f_t \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{R}}_{kj}^0 = \frac{1}{\Delta_{kj}} \mathbf{S}_i \mathbf{\Pi}_k^* \mathbf{\Pi}_0 \begin{bmatrix} \tilde{x}_{kj} \\ \tilde{y}_{kj} \\ -f_t \end{bmatrix}. \qquad (402)$$

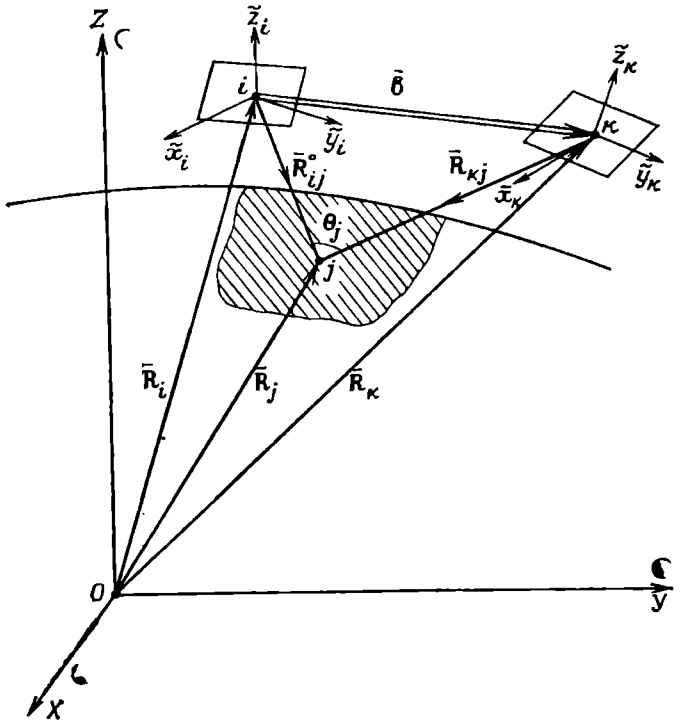

Рис. 22. Прямая фотограмметрическая засечка

5. Выполняется численное интегрирование уравнений движения, в результате чего получают значения координат x, y, z и составляющих скорости $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ на моменты $t=t_0+h$, образующие равноотстоящие узлы сетки численного интегрирования.

6. Выполняется интерполирование координат ИСЗ на моменты фотографирования t_i и t_k.

7. Инерциальные координаты ИСЗ преобразуются в гринвичские.

8. Выполняется прямая фотограмметрическая засечка с базиса фотографирования b, в результате которой определяются гринвичские геодезические координаты точки j.

9. Производится оценка точности.

В результате численного интегрирования уравнений движения ИСЗ получают значения координат и составляющих скорости для равноотстоящих моментов t_0, t_0+h, t_0+2h, ..., t_0+nh, где h — шаг интегрирования. Для вычисления координат ИСЗ необходимо выполнить интерполирование на моменты фотографирования t_i, не совпадающие с узлами сетки численного интегрирования.

Рассмотрим процесс интерполирования по формуле Стирлинга, обеспечивающей высокую точность интерполяции.

Таблица 8

Момент времени	Значение функции	Разность				
t	$f=x(t_i)$	f^1	f^2	f^3	f^4	f^5
t_{-2}	f_{-2}					
		$f^1_{-3/2}$				
t_{-1}	f_{-1}	f^1_{-1}	f^2_{-1}			
		$f^1_{-1/2}$	$f^2_{-1/2}$	$f^3_{-1/2}$		
t_0	f_0	f^1_0	f^2_0	f^3_0	f^4_0	
		$f^1_{1/2}$	$f^2_{1/2}$	$f^3_{1/2}$	$f^4_{1/2}$	$f^5_{1/2}$
t_1	f_1	f^1_1	f^2_1	f^3_1	f^4_1	
		$f^1_{3/2}$	$f^2_{3/2}$	$f^3_{3/2}$		
t_2	f_2	f^1_2	f^2_2			
		$f^1_{5/3}$				
t_3	f_3					

Пусть даны значения функции $x(t_i)$ и ее разностей (табл. 8) для равноотстоящих значений времени $t_i=t_0+ih$ $(i=0, \pm1, ..., n)$, где h — шаг таблицы, а t_i $(i=0, \pm1, ..., n)$ — узлы таблицы.

Величины f^1 с различными индексами являются разностями первого порядка (первые разности), f^2 — разностями второго порядка и т. д.

Первые разности, имеющие дробный нижний индекс, определяются формулой

$$f^1_{i+1/2}=f_{i+1}-f_i \quad (i=0, \pm1, ..., n). \tag{403}$$

Вторые разности, у которых нижние индексы — целые числа, вычисляются следующим образом:

$$f^2_i=f^2_{i+1/2}-f^1_{-1/2}. \tag{404}$$

и т. д.

При использовании формулы Стирлинга основное значение имеют центральные разности, которые равны среднему арифметическому из соседних разностей того же столбца. Например:

$$f^1_0=\frac{1}{2}(f^1_{-1/2}+f^1_{+1/2});$$

$$f^2_{1/2}=\frac{1}{2}(f^2_0+f^2_1). \tag{405}$$

Для гладких функций при небольшом шаге разности быстро убывают по мере увеличения их порядка, однако, вследствие ошибок округления при вычислении функции f, разности некоторого порядка целиком определяются ошибками округления и начинают «прыгать». Поэтому с этого порядка уже нет смысла в учете соответствующих разностей при интерполировании функции. Пусть t_i — момент, для которого необходимо вычислять значение $x(t_i)$; t_0 — ближайший к t_i узел таблицы.

Введем обозначение

$$q = \frac{t_i - t_0}{h}, \tag{406}$$

при этом $t_i = t_0 + qh$.

Интерполяционная формула Стирлинга имеет вид

$$f(t_0 + qh) \approx f_0 + q f_0^1 \frac{q^2}{2!} f_0^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{q(q^2-1)(q^2-2^2)\ldots[q^2-(n-1)^2]}{(2n-1)!} f_0^{2n-1} +$$

$$+ \frac{q^2(q^2-1)(q^2-2^2)\ldots[q^2-(n-1)^2]}{2n!} f_0^{2n}. \tag{407}$$

В выражение (407) входят только разности, являющиеся элементами той же строки, что и f_0.

Напишем формулу Стирлинга с учетом разностей шестого порядка в виде

$$x(t_i) = f(t_0 + qh) \approx f_0 + a_1 f_0^1 + a_2 f_0^2 + a_3 f_0^3 + \ldots + a_6 f_0^6, \tag{408}$$

где

$$a_1 = q; \quad a_2 = \frac{q^2}{2}; \quad a_3 = \frac{q(q^2-1)}{6}; \quad a_4 = \frac{q^2(q^2-1)}{24};$$

$$a_5 = \frac{q(q^2-1)(q^2-4)}{120}; \quad a_6 = \frac{q^2(q^2-1)(q^2-4)}{720}. \tag{409}$$

Остаточный член $R_n(t)$ является разностью между точным значением функции $f = x(t_i)$ и ее приближенным значением, полученным по интерполяционной формуле, учитывающей разности до n-го порядка:

$$R_n(t) = x(t_i) - P_n(x), \tag{410}$$

где $P_n(x)$ — результат интерполяции.

Предположим, что функция $f = x(t_i)$ дифференцируема k раз ($k = n+1$ или $n+2$). Пусть M_k — верхняя граница модуля производной $f^{(k)}(t)$ в интервале тех значений t, которые отвечают табличным значениям t, использованным при составлении интерполяционной формулы n-го порядка.

Таблица 9

Момент времени t	Значение функции $r(t)$	Разность				
		f^1	f^2	f^3	f^4	f^5
100^s	6 357 071,3					
		3 893,5				
150^s	6 360 964,8		1 533,2			
		5 426,7		—25,8		
200^s	6 366 391,5		1 507,4		—6,0	
		6 934,1		—31,8		—0,5
250^s	6 373 325,6		1 475,6		—5,5	
		8 409,7		—37,3		—1,4
300^s	6 381 753,3		1 438,3		—6,9	
		9 128,85		—40,75		—0,6
		9 848,0		—44,2		+0,2
350^s	6 391 583,3		1 394,1		—6,7	
		11 242,1		—50,9		
400^s	6 402 825,4		1 343,2			
		12 585,3				
450^s	6 415 410,7					

Тогда оценка остаточного члена формулы Стирлинга определяется по формуле

$$| R_n(t) | \leqslant \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} Q_n(q) M_{n+1}, \tag{411}$$

где для четного n

$$Q_n(q) = \left| q(q^2 - 1^2) \ldots \left[q^2 - \left(\frac{n}{2} \right)^2 \right] \right|; \tag{412}$$

для нечетного

$$Q(q) = \left| q^2(q^2 - 1^2) \ldots \left[q^2 - \left(\frac{n-1}{2} \right)^2 \right] \right|. \tag{413}$$

Применение оценочной формулы (411) затруднительно, если отсутствует информация о возможном численном значении производной $f^{(k)}(t)$, при этом число M_k неизвестно.

Пример 14. Даны значения $r(t)$ с шагом $h=50^s$, полученные в результате численного интегрирования, на промежутке времени 100^s—450^s (табл. 9). Требуется определить значения $r(t_l)$ для $t_l=336{,}427^s$.

Решение. Составим таблицу разностей f_l^1, f_l^2, ..., f_l^5. Убеждаемся, что разности пятого порядка «прыгают», что объясняется ошибками округления в значениях $r(t)$. В данном примере ближайшее к t_l табличное $t=300$ и все необходимые разности будут расположены в соответствующей ему строке таблицы. При этом центральные разности, находящиеся в столбцах f^1, f^3 и f^5, получаются как средние арифметические из соседних разностей, стоящих в столбцах. Например, $9128{,}85=(8409{,}7+9{,}848)/2$ и т. д.

В данном случае

$$q = \frac{t_l - t_0}{h} = \frac{336{,}427 - 300}{50} = 7{,}2854 \cdot 10^{-1};$$

$$a_1 = q = 7{,}2854 \cdot 10^{-1}; \quad a_3 = \frac{q(q^2-1)}{6} = -5{,}697\,541 \cdot 10^{-2};$$

$$a_2 = \frac{q^3}{2} = 2{,}653\,852\,6 \cdot 10^{-1}; \quad a_4 = \frac{q^2(q^2-1)}{24} = -1{,}037\,7216 \cdot 10^{-2}.$$

В соответствии с формулой (408) имеем:

$r(t_0) = r(300^s) =$	6 381 753,3
$a_1 f_0^1 =$	6 650.73
$a_2 f_0^2 =$	381,70
$a_3 f_0^3 =$	2,32
$a_4 f_0^4 =$	0,07
$r(t_i) =$	6388 770,1

Точное значение $r(t_i) = 6\,388\,770{,}4$. Таким образом, ошибка интерполяции составляет 0,3 м, т. е. того же порядка, что и точность вычислений (8 значащих цифр), с которой определены значения функции $r(t)$ в табл. 9.

§ 30. ВЫЧИСЛЕНИЕ ГРИНВИЧСКИХ КООРДИНАТ ОПРЕДЕЛЯЕМОЙ ТОЧКИ СНИМКА

Пусть в результате интегрирования уравнений движения в дальнейшей интерполяции вычислены инерциальные координаты ИСЗ на моменты фотографирования t_i и t_k. Они будут следующими:

$$\bar{\mathbf{r}}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{r}}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix}. \tag{414}$$

Перевычислим инерциальные координаты в гринвичские по формулам

$$\bar{\mathbf{R}}_i = \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \mathbf{PS}_i \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{R}}_k = \mathbf{PS}_k \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix}, \tag{415}$$

где матрица **PS** определяется формулой (147).

В результате фотограмметрической обработки снимков для точек i и i получены единичные векторы $\bar{\mathbf{R}}^0_{ij}$ и $\bar{\mathbf{R}}^0_{kl}$ спутникоцентрических направлений на точку j в гринвичской системе координат:

$$\bar{\mathbf{K}}^0_{ij} = \frac{1}{\Delta_{ij}} \mathbf{S}_i \Pi_i^* \Pi_0 \begin{bmatrix} \tilde{x}_{ij} \\ \tilde{y}_{ij} \\ -f_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_{ij} - S_i \cos\delta_{ij} \\ \sin(\alpha_{ij} - S_i)\cos\delta_{ij} \\ \sin\delta_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ij} \\ M_{ij} \\ N_{ij} \end{bmatrix}; \tag{416}$$

$$\bar{\mathbf{R}}^0_{kj} = \frac{1}{\Delta_{kj}} \mathbf{S}_k \mathbf{\Pi}^*_k \mathbf{\Pi}_0 \begin{bmatrix} \tilde{x}_{kj} \\ \tilde{y}_{kj} \\ -f_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{kj} - S_k) \cos\delta_{kj} \\ \sin(\alpha_{kj} - S_k) \cos\delta_{kj} \\ \sin\delta_{kj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{kj} \\ M_{kj} \\ N_{kj} \end{bmatrix}; \tag{417}$$

$$\bar{\mathbf{R}}_j = \bar{\mathbf{R}}_i + | R_{ij} | \bar{\mathbf{R}}^0_{ij}; \quad \bar{\mathbf{R}}_j = \bar{\mathbf{R}}_k + | R_{kj} | \bar{\mathbf{R}}^0_{kj}. \tag{418}$$

Запишем эти уравнения в координатной форме:

$$\begin{aligned} X_j &= X_i + R_{ij}\cos(\alpha_{ij} - S_i)\cos\delta_{ij} = X_i + R_{ij}L_{ij}; \\ Y_j &= Y_i + R_{ij}\sin(\alpha_{ij} - S_i)\cos\delta_{ij} = Y_i + R_{ij}M_{ij}; \\ Z_j &= Z_i + R_{ij}\sin\delta_{ij} = Z_i + R_{ij}N_{ij}; \end{aligned} \tag{419}$$

$$\begin{aligned} X_j &= X_k + R_{kj}\cos(\alpha_{kj} - S_k)\cos\delta_{kj} = X_k + R_{kj}L_{kj}; \\ Y_j &= Y_k + R_{kj}\sin(\alpha_{kj} - S_k)\cos\delta_{kj} = Y_k + R_{kj}M_{kj}; \\ Z_j &= Z_k + R_{kj}\sin\delta_{kj} = Z_k + R_{kj}N_{kj}. \end{aligned}$$

Мы получили систему из шести линейных уравнений с пятью неизвестными — координатами определяемой точки планеты X_j, Y_j, Z_j и спутникоцентрическими расстояниями R_{ij} и R_{kj}.

Наиболее простой способ решения задачи заключается в проецировании векторных уравнений (418) на плоскость экватора. Тогда координаты X_j и Y_j определяемой точки можно вычислить по известным в геодезии формулам Гаусса, т. е.

$$\begin{aligned} X_j &= \frac{Y_k - Y_i + [X_i \operatorname{tg}(\alpha_{ij} - S_i) - X_k \operatorname{tg}(\alpha_{kj} - S_k)]}{\operatorname{tg}(\alpha_{ij} - S_i) - \operatorname{tg}(\alpha_{ik} - S_k)}; \\ Y_j &= \frac{X_k - X_i + [Y_i \operatorname{ctg}(\alpha_{ij} - S_i) - Y_k \operatorname{ctg}(\alpha_{kj} - S_k)]}{\operatorname{ctg}(\alpha_{ij} - S_i) - \operatorname{ctg}(\alpha_{ik} - S_k)}. \end{aligned} \tag{420}$$

Аппликату определяемой точки Z_j вычисляем дважды:

$$\begin{aligned} Z_j' &= Z_i + \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2} \operatorname{tg}\delta_{ij}; \\ Z_j'' &= Z_k + \sqrt{(X_j - X_k)^2 + (Y_j - Y_k)^2} \operatorname{tg}\delta_{kj}. \end{aligned} \tag{421}$$

Определим среднее арифметическое для двух значений Z_j' и Z_j''. Оценку точности выполним на основании формулы для ошибки положения M, т. е.

$$M_j^2 = \mu^2 \frac{r_{ij}^2 + r_{kj}^2}{\sin^2\theta_j} \left[1 + \frac{r_{ij} r_{kj}}{(r_{ij}^2 + r_{kj}^2)^2} \sin^2\theta_j \right], \tag{422}$$

где $\mu^2 = m^2(\delta_{ij}) = m^2(\alpha_{ij}\cos\delta_{ij})$; θ_j — угол засечки при определяемой точке;

$$\theta_j = \arccos[L_{ij}L_{kj} + M_{kj} + N_{ij}N_{kj}].$$

Пример 15. Из интегрирования дифференциальных уравнений движения и интерполяции определены инерциальные координаты ИСЗ на моменты фотографирования t_i и t_k:

$t_i = 4{,}571\,7527^h \cdot 10^{-1}$; $t_k = 4{,}613\,4193 \cdot 10^{-1}$;

$x_i = -3\,359\,943{,}8$; $x_k = -3\,779\,405{,}7$;

$y_i = -4\,164\,601{,}8$; $y_k = -4\,233\,567{,}1$;

$z_i = 3\,834\,931{,}0$; $z_k = 3\,746\,115{,}4$;

$S_i = 4{,}600\,6349^h$; $S_k = 4{,}604\,813^h$.

На снимках i и k идентифицирована определяемая точка j (см. рис. 22) и измерены ее координаты на снимках:

$$\tilde{\mathbf{r}}_{ij} = \begin{pmatrix} 31{,}0142 \\ -122{,}8980 \\ -100{,}0123 \end{pmatrix}_i ; \quad \tilde{\mathbf{r}}_{kj} = \begin{pmatrix} 76{,}1614 \\ -121{,}2301 \\ -100{,}0123 \end{pmatrix}_k .$$

Из обработки звездных снимков определены операторы $(\Pi_i{}^*\Pi_0)^\tau$ и $(\Pi_k{}^*\Pi_0)^\tau$ ориентации топографической камеры в инерциальном пространстве:

$$(\Pi_i{}^*\Pi_0)^\tau = \begin{bmatrix} 3{,}429\,0738 \cdot 10^{-1} & 7{,}143\,9168 \cdot 10^{-1} & 6{,}099\,6655 \cdot 10^{-1} \\ -8{,}315\,1556 \cdot 10^{-1} & -7{,}125\,683\ 10^{-2} & 5{,}509\,1239 \cdot 10^{-1} \\ 4{,}370\,3146 \cdot 10^{-1} & -6{,}961\,0853 \cdot 10^{-1} & 5{,}695\,9324 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix};$$

$$(\Pi_k{}^*\Pi_0)^\tau = \begin{bmatrix} 3{,}440\,137 \cdot 10^{-1} & 7{,}124\,5158 \cdot 10^{-1} & 6{,}116\,1055 \cdot 10^{-1} \\ -8{,}303\,257\,7 \cdot 10^{-1} & -7{,}331\,263 \cdot 10^{-2} & 5{,}524\,3509 \cdot 10^{-1} \\ 4{,}384\,22 \cdot 10^{-1} & -6{,}978\,8119 \cdot 10^{-1} & 5{,}663\,427 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix},$$

Определить гринвичские прямоугольные координаты X_j, Y_j и Z_j точки j поверхности Земли.

Решение.

1. Нормируем векторы направлений на точку j в системах координат снимков i и k:

$$\tilde{\mathbf{r}}^0_{ij} = \begin{bmatrix} 1{,}920\,8992 \cdot 10^{-1} \\ -7{,}611\,8255 \cdot 10^{-1} \\ -6{,}194\,374 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{r}}^0_{kj} = \begin{bmatrix} 4{,}361\,0066 \cdot 10^{-1} \\ -6{,}941\,6432 \cdot 10^{-1} \\ -5{,}726\,7106 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix};$$

$$\Delta_{ij} = 161{,}456\,67; \qquad \Delta_{kj} = 174{,}641\,79.$$

2. Вычислим направления $\bar{\mathbf{r}}^0_{ij}$ и $\bar{\mathbf{r}}^0_{kj}$ в инерциальной системе координат:

$$\bar{\mathbf{r}}^0_{ij} = \Pi_i^* \Pi_0 \tilde{\mathbf{r}}^0_{ij} = \begin{bmatrix} l_{ij} \\ m_{ij} \\ n_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4{,}280\,9055 \cdot 10^{-1} \\ 6{,}226\,6354 \cdot 10^{-1} \\ -6{,}550\,0383 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix};$$

$$\bar{\mathbf{r}}^0_{kj} = \Pi_k^* \Pi_0 \tilde{\mathbf{r}}^0_{kj} = \begin{bmatrix} l_{kj} \\ m_{kj} \\ n_{kj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4{,}753\,3117 \cdot 10^{-1} \\ 7{,}612\,4797 \cdot 10^{-1} \\ -4{,}410\,8709 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix}.$$

3. Определим спутникоконцентрические прямые восхождения α_{ij}, α_{kj} и склонения δ_{ij}, δ_{kj} точки j для моментов времени t_i и t_k:

$$\alpha_{ij} = \operatorname{arctg}\frac{m_{ij}}{l_{ij}} = 55{,}490\,89^\circ; \quad \delta_{ij} = \operatorname{arctg}\frac{n_{ij}}{\sqrt{m_{ij}^2 + l_{ij}^2}} = -40{,}919\,907^\circ;$$

$$\alpha_{kj} = \operatorname{arctg}\frac{m_{kj}}{l_{kj}} = 58{,}018\,885^\circ; \quad \delta_{kj} = \operatorname{arctg}\frac{n_{kj}}{\sqrt{m_{kj}^2 + l_{kj}^2}} = -26{,}173\,319^\circ.$$

4. Получим $\alpha_{ij}-S_i=-13{,}518\,633^\circ$ и $\alpha_{kj}-S_k=-11{,}053\,31^\circ$.

5. Найдем гринвичские координаты ИСЗ в моменты времени t_i и t_k:

$$X = x\cos S + y\sin S;$$

$$Y = -x\sin S + y\cos S;$$

$$Z = z;$$

$X_i=-5\,235\,098{,}7$; $X_k=-5\,304\,254{,}8$;

$Y_i=2\,018\,620{,}4$; $Y_k=2\,017\,889{,}8$;

$Z_i=3\,834\,931{,}0$; $Z_k=3\,746\,115{,}4$.

6. По формулам (420) и (421) вычислим гринвичские координаты определяемой точки j:

$X_j=-4\,919\,193{,}0$; $Y_j=1\,942\,669{,}7$;

$Z_j'=-3\,553\,289{,}6$; $Z_j''=3\,553\,287{,}1$;

$$Z_j = \frac{Z_j' + Z_j''}{2} = 3\,553\,288{,}4.$$

7. Получим спутникоцентрические расстояния r_{ij} и r_{kj}:

$$r_{ij} = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2} = 429\,936{,}29;$$

$$r_{kj} = \sqrt{(X_j - X_k)^2 + (Y_j - Y_k)^2 + (Z_j - Z_k)^2} = 437\,164{,}61.$$

8. Произведем оценку точности. Поскольку расстояния r_{ij} и r_{kj} весьма близки, то формулу (422) для оценки точности можно записать в более простом виде, а именно:

$$M_j^2 = \mu^2 \frac{r_{ij}^2 + r_{ik}^2}{\sin^2\theta_j}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\theta_j\right),$$

где

$\theta_j = \arccos(l_{ij}l_{kj} + m_{ij}m_{kj} + n_{ij}n_{kj}) \approx 15^\circ$;

$\sin\theta_j = 0{,}2599$; $\sin^2\theta_j = 6{,}756\cdot10^{-2}$;

$\mu = 10'' = 4{,}85\cdot10^{-5}$; $\mu^2 = 2{,}35\cdot10^{-9}$;

$1 + 1/4\sin^2\theta_j = 1{,}017$; $M_j = 115{,}3$ м.

Как видим, в силу малости угла засечки положение точки j определено с невысокой точностью.

Глава VI
ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ДВИЖЕНИЯ КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ИСЗ ПО КОСМИЧЕСКИМ СНИМКАМ

§ 31. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ ОРБИТЫ

Пусть задана математическая модель движения ИСЗ в инерциальной системе координат:

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = v_x; \quad \dot{v}_x = -\mu\frac{x}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial x} + Q_x;\\
&\dot{y} = v_y; \quad \dot{v}_y = -\mu\frac{y}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial y} + Q_y;\\
&\dot{z} = v_z; \quad \dot{v}_z = -\mu\frac{z}{r^3} + \frac{\partial R}{\partial z} + Q_z,
\end{aligned} \tag{422}$$

где R — пертурбационная функция, учитывающая возмущения, обусловленные действием гравитационных сил; Q_x, Q_y, Q_z — возмущающие ускорения, вызванные сопротивлением атмосферы.

На топографических снимках, выполненных на борту ИСЗ, измерены координаты точек $\tilde{x}_{ij}$ и $\tilde{y}_{ij}$ $(j=1, 2, ..., N)$. Известны их инерциальные координаты x_j, y_j, z_j, а моменты фотографирования t_i определены в системе всемирного времени UT1.

Инерциальные координаты x_i, y_i, z_i ИСЗ в моменты фотографирования t_i связаны с координатами точек планеты на снимке $\tilde{x}_{ij}$ и $\tilde{y}_{ij}$ уравнениями коллинеарности:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_{ij} &= -f_t\frac{a_{11}(x_j-x_i)+a_{12}(y_j-y_i)+a_{13}(z_j-z_i)}{a_{31}(x_j-x_i)+a_{32}(y_j-y_i)+a_{33}(z_j-z_i)} = -f_t\frac{U_{ij}}{W_{ij}};\\
\tilde{y}_{ij} &= -f_t\frac{a_{21}(x_j-x_i)+a_{22}(y_j-y_i)+a_{23}(z_j-z_i)}{a_{31}(x_j-x_i)+a_{32}(y_j-y_i)+a_{33}(z_j-z_i)} = -f_t\frac{V_{ij}}{W_{ij}},
\end{aligned} \tag{423}$$

где $\Pi_i=[a_{ik}]$. Причем для инерциальной системы координат $\Pi_i=(\Pi_i^*\Pi_0)^T$.

Если на снимках измерены координаты точек $\tilde{x}_{ij}$ и $\tilde{y}_{ij}$, их инерциальные координаты x_i, y_i, z_i неизвестны, но известны спутниконцентрические направления на эти точки, то формулы (423) примут вид:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_{ij} &= -f_t\frac{a_{11}l_{ij}+a_{12}m_{ij}+a_{13}n_{ij}}{a_{31}l_{ij}+a_{32}m_{ij}+a_{33}n_{ij}};\\
\tilde{y}_{ij} &= -f_t\frac{a_{21}l_{ij}+a_{22}m_{ij}+a_{23}n_{ij}}{a_{31}l_{ij}+a_{32}m_{ij}+a_{33}n_{ij}}.
\end{aligned} \tag{424}$$

Предположим, что на некотором интервале времени t_i—t_0 получен ряд топографических снимков, на которых измерены координаты $j=1, 2, ..., N$ точек поверхности планеты. По этим данным и зарегистрированным моментам съемки t_i требуется определить начальные условия x_0, y_0, z_0, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$ в эпоху t_0 для интегрирования уравнений движения (422).

Вместо координат и составляющих скорости можно также определять начальные значения кеплеровых элементов орбиты a_0, l_0, J_0, ω_0, Ω_0, M_0 в момент времени t_0.

Задача разрешима, если между множеством фазовых состояний ИСЗ $[x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}|t]_i$ и множеством измерений $\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}, t_i]$ существует однозначное соответствие.

На практике задачу определения орбит решают в два этапа. На первом этапе из всего состава измерений выбирают необходимое число измерений, по которым определяют предварительную орбиту.

Располагая предварительными значениями элементов орбиты $\tilde{a}_0$, $\tilde{e}_0$, $\tilde{J}_0$, $\tilde{\omega}_0$, $\tilde{\Omega}_0$, $\tilde{M}_0$ для момента t_0 и используя всю совокупность измерений $[\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}]$ $(j=1, 2, ..., N)$, по способу наименьших квадратов определяют поправки Δa_0, Δe_0, ΔJ_0, $\Delta\omega_0$, $\Delta\Omega_0$ и $\Delta M_0{}^0$ к предварительным значениям элементов. При этом выполняют оценку точности. Этот этап называется дифференциальным уточнением орбиты. Поскольку предварительные значения элементов достаточно близки к их истинным значениям, итерационный процесс при дифференциальном уточнении орбиты быстро сходится. В последнем приближении получают элементы орбиты, наилучшим образом (с точки зрения способа наименьших квадратов) описывающие орбиту при данном составе, частоте и точности непосредственных измерений.

Предположим, что минимум на двух топографических снимках i и k (рис. 23) удалось установить по два твердых пункта, имеющих геодезические координаты B, L, H. Зная моменты фотографирования t_i и t_k, можно вычислить инерциальные координаты точек планеты *1*, *2*, *3*, *4*, ..., если известны спутникоцентрические направления $\bar{r}_{i1}{}^0$, $\bar{r}_{i2}{}^0$, $\bar{r}_{k3}{}^0$, $\bar{r}_{k4}{}^0$, определить инерциальные координаты ИСЗ путем прямых пространственных засечек с базисов *1*—*2* и *3*—*4*. При этом используют формулы прямой засечки, которые в данном случае будут иметь вид:

$$x_i = \frac{y_2 - y_1 + [x_1 \operatorname{tg}\alpha_{1i} - x_2 \operatorname{tg}\alpha_{2i}]}{\operatorname{tg}\alpha_{1i} - \operatorname{tg}\alpha_{2i}};$$

$$y_i = \frac{x_2 - x_1 + [y_1 \operatorname{ctg}\alpha_{1i} - y_2 \operatorname{ctg}\alpha_{2i}]}{\operatorname{ctg}\alpha_{1i} - \operatorname{ctg}\alpha_{2i}}; \qquad (425)$$

$$z_i' = z_1 + \sqrt{(x_i - x_1)^2 + (y_i - y_1)^2}\,\mathrm{tg}\,\delta_{1i};$$

$$z_i'' = z_2 + \sqrt{(x_i - x_2)^2 + (y_i - y_2)^2}\,\mathrm{tg}\,\delta_{2i}.$$

При этом перестановка букв двойного индекса $ij \to ji$ эквивалентна изменению направления на 180°. В данном случае используются топоцентрические направления на ИСЗ.

Оценка точности выполняется по формуле (422). После того как определены инерциальные координаты x_i, y_i, z_i и x_k, y_k, z_k ИСЗ в моменты t_i и t_k, задача сводится к определению орбиты ИСЗ по двум положениям и разности моментов.

Определение долготы восходящего узла Ω и наклонения J. Введем в рассмотрение вектор нормали $\bar{N}^0$ к плоскости орбиты. Поскольку плоскость орбиты определена в инерциальном пространстве геоцентрическими векторами $\bar{r}_i$ и $\bar{r}_k$, вектор $\bar{N}^0$ представим в

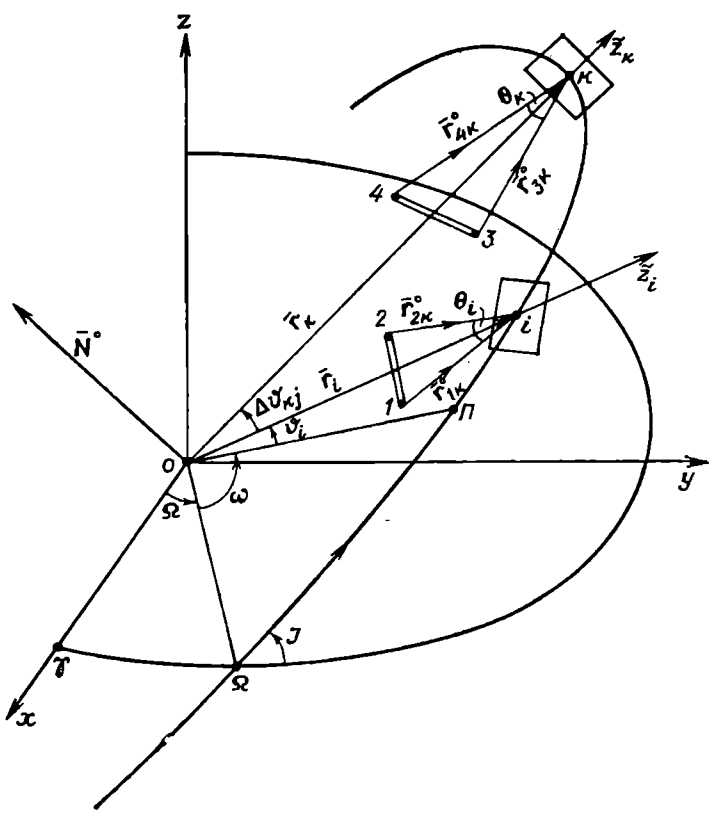

Рис. 23. Схема определения орбиты по двум снимкам

виде векторного произведения единичных векторов $\bar{r}_i = \bar{r}_i / r_i$ и $\bar{r}_k^0 = \bar{r}_k / r_k$. Он будет следующим:

$$\bar{N}^0 = \begin{pmatrix} l_n \\ m_n \\ n_n \end{pmatrix} = [\bar{r}_i^0 \times \bar{r}_k^0] = \frac{1}{\sin \Delta\vartheta_{ik}} \begin{bmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ l_i & m_i & n_i \\ l_k & m_k & n_k \end{bmatrix}, \tag{426}$$

где $\Delta\vartheta_{ik} = \vartheta_k - \vartheta_i$ — разность истинных аномалий; $\bar{e}_x$, $\bar{e}_y$, $\bar{e}_z$ — орты осей инерциальной системы координат; l, m, n с соответствующими индексами — направляющие косинусы векторов $\bar{r}_i^0$ и $\bar{r}_k^0$.

Эйлеровы углы Ω и J определим по формулам:

$$l_n' = m_i n_k - m_k n_i;\ m_n' = l_k n_i - l_i n_k;\ n_n' = l_i m_k - l_k m_i; \tag{427}$$

$$|\sin \Delta\vartheta_{ik}| = \sqrt{l_n'^2 + m_n'^2 + n_n'^2};\quad \Delta = \sqrt{l_n'^2 + m_n'^2}; \tag{428}$$

$$\cos J = \frac{n_n'}{|\sin \Delta\vartheta|};\ \sin J = \frac{\Delta}{|\sin \Delta\vartheta|}, \tag{429}$$

если $J \leqslant 90°$, то

$$\cos \Omega = -\frac{m_n'}{\Delta};\quad \sin \Omega = \frac{l_n'}{\Delta}, \tag{430}$$

если $J > 90°$, то

$$\cos \Omega = \frac{m_n'}{\Delta};\quad \sin \Delta = -\frac{l_n'}{\Delta}. \tag{431}$$

Определение большой полуоси a, эксцентриситета e аргумента перицентра ω и средней аномалии в эпоху t_0. На основании уравнения орбитального эллипса в полярных координатах выразим фокальный параметр p

$$p = a(1-e^2) = r_k(1+e\cos\vartheta_k) = r(1+e\cos\vartheta_i); \tag{432}$$

и эксцентриситет

$$e = \frac{r_k - r_i}{r_i \cos\vartheta_i - r_k \cos\vartheta_k}. \tag{433}$$

Поскольку эксцентриситет картографических ИСЗ мал ($e \leqslant 0{,}05$), используем формулу (433) для приближенного определения значения ϑ_i в точке i.

Для этого необходимо выполнить проведение гипотез. При этом разность $\Delta\vartheta_{ik}$ определяют по формулам:

$$|\sin \Delta\vartheta_{ik}| = \sqrt{l_n'^2 + m_n'^2 + n_n'^2}; \tag{434}$$

$$\cos \Delta\vartheta_{ik} = l_i l_k + m_i m_k + n_i n_k,$$

которые не позволяют определить квадрант, в котором лежит $\Delta\vartheta$. Для определения квадранта воспользуемся приближенной формулой.

Примем, что большая полуось $a \approx \frac{r_i + r_k}{2}$.

Вычислим период обращения $T^s \approx 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}$.

Определим $\Delta\vartheta_{ik}$ по формуле $\Delta\vartheta_{ik} \approx 360^\circ \frac{t_k - t_i}{T}$.

Проведение гипотез заключается в следующем. Положим, что $\vartheta_i^{(0)} = 0°$, тогда $\vartheta_k = \Delta\vartheta_{ik}$. Вычислим эксцентриситет по формуле (433). Если при этом $0 < e^{(0)} < 0{,}05$, то в качестве приближенного значения ϑ_i примем $\vartheta_i^{(0)} = 0°$. Если же это неравенство не выполняется, то $\vartheta_i^{(0)}$ будем придавать значения 30, 60° и т. д. до выполнения условия неравенства $0 < e < 0{,}05$. При этом значения a, определяемые по формуле

$$a^{(0)} = \frac{r_i(1 + e\cos\vartheta_i^{(0)})}{1 - e^2}, \tag{435}$$

должны быть в пределах 6500÷6850 км.

Полученные приближенные значения $\vartheta_i^{(0)}$, $a^{(0)}$, $e^{(0)}$ затем следует уточнить, используя ньютоновский итерационный процесс.

С этой целью введем понятие модифицированного времени τ. Модифицированное время τ определяется формулой

$$\tau = \sqrt{\mu}(t_k - t_i) = 1{,}996\,4982 \cdot 10^7 (t_k - t_i). \tag{436}$$

Таким образом, время от момента t_i отсчитывается в единицах, содержащих $1/\mu$ секунд. Выразим ϑ_i как функцию модифицированного времени τ, для чего составим следующую систему формул задачи двух тел:

$$e = \frac{r_k - r_i}{r_i\cos\vartheta_i - r_k\cos\vartheta_k}; \tag{437}$$

$$a = \frac{r_i(1 + e\cos\vartheta_i)}{1 - e^2}; \tag{438}$$

$$\operatorname{tg} E_i = \frac{\sqrt{1 - e^2}\sin\vartheta_i}{e + \cos\vartheta_i}; \tag{439}$$

$$\operatorname{tg} E_k = \frac{\sqrt{1 - e^2}\sin\vartheta_k}{e + \cos\vartheta_k}; \tag{440}$$

$$(M_k - M_i)^{(0)} = (E_k - E_i)^0 + 57{,}295\,78^\circ e(\sin E_i - \sin E_k); \qquad (441)$$

$$T^s = 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}; \qquad (442)$$

$$\tau(\vartheta_i) = T^{(s)} \frac{(M_k - M_i)^0}{360^\circ} \sqrt{\mu}. \qquad (443)$$

Определим итерационную функцию $F(\vartheta_i)$:

$$F(\vartheta_i) = \tau - \tau(\vartheta_i^{(0)}). \qquad (444)$$

Если бы полученное приближенное значение $\vartheta_i^{(0)}$ совершенно точно совпало с истинным, то очевидно, что итерационная функция F была бы равной нулю. Но, поскольку достичь этого в процессе гипотез практически невозможно, то приближенное значение $\vartheta_i^{(0)}$ необходимо уточнить по формуле Ньютона:

$$\vartheta_i^{(1)} = \vartheta_i^{(0)} - \frac{F(\vartheta_i^{(0)})}{F'(\vartheta_i^{(0)})}, \qquad (445)$$

где $F'(\vartheta_i^0) = \frac{dF(\vartheta_i^0)}{d\vartheta_i^0}$ — производная от итерационной функции по истинной аномалии ϑ_i.

Вычисление производной $F'(\vartheta_i^0)$ выполним с помощью приближенного численного метода. С этой целью изменим ϑ_i^0 на малую величину $\delta\vartheta_i$ (порядка 1% от ϑ_i^0) и вычислим варьированное значение $F(\vartheta_i^0 + \delta\vartheta_i)$. Затем вычислим производную $F'(\vartheta_i^0)$ по формуле

$$F'(\vartheta_i^{(0)}) = \frac{F(\vartheta_i^{(0)} + \delta\vartheta_i) - F(\vartheta_i^0)}{\delta\vartheta_i}. \qquad (446)$$

Процесс приближений по формуле (445) будем продолжать до тех пор, пока для некоторого приближения с номером N не выполнится условие $|\vartheta_i^{(N)} - \vartheta_i^{(N-1)}| \leqslant |\varepsilon|$. При этом полагают $\varepsilon \approx \approx 1 \div 2''$.

В процессе итераций определены значения большой полуоси a и эксцентриситета e. Следует вычислить аргумент широты ω и среднюю аномалию M_0 в эпоху t_0.

Для этого прежде всего найдем аргументы широты в точках i и k по формулам

$$\sin u = \frac{y\cos\Omega - x\sin\Omega}{r\cos J}; \qquad \cos u = \frac{x\cos\Omega + y\sin\Omega}{r}. \qquad (447)$$

Тогда аргумент перицентра представим в виде

$$\omega_i = u_i - \vartheta_i. \qquad (448)$$

Среднюю аномалию M_0 в эпоху T_0 определим из выражения

$$M_0 = M_i - n(t_i - t_0), \qquad (449)$$

где $M_i = E_i - e \sin E_i$. На этом процесс предварительного определения орбиты заканчивается.

Пример 16. На двух топографических снимках с $f_t = 100{,}0123$ мм, полученных в моменты $t_i = 609{,}531^s + t_0$ и $t_k = 1\,836{,}217^s + t_0$, отдешифрировано по две исходные точки (см. рис. 23), инерциальные координаты (x, y, z) (в м) которых в моменты t_i и t_k были следующими:

снимок i			
точка *1*	—4 754 045,5	—2 241 030,1	3 829 168,8
точка *2*	—4 569 751,4	—2 075 698,3	3 924 687,9
снимок k			
точка *3*	—3 885 391,3	—3 176 069,0	—3 923 614,0
точка *4*	—3 878 644,2	—3 081 179,2	—4 004 572,9

В процессе фотограмметрической обработки были определены операторы ориентации снимков в инерциальном пространстве:

$$\Pi_i = \Pi_i^* \Pi_0 = \begin{bmatrix} 3{,}267\,8687 \cdot 10^{-1} & -8{,}460\,7536 \cdot 10^{-1} & 4{,}211\,4955 \cdot 10^{-1} \\ 7.400\,686 \cdot 10^{-1} & -4{,}806\,582 \cdot 10^{-2} & -6{,}708\,1164 \cdot 10^{-1} \\ 5{,}878.0009 \cdot 10^{-1} & 5{,}308\,9199 \cdot 10^{-1} & 6{,}104\,4646 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix};$$

$$\Pi_k = \Pi_k^* \Pi_0 = \begin{bmatrix} 8{,}226\,984 \cdot 10^{-1} & -3{,}824\,5619 \cdot 10^{-1} & 4{,}205\,8861 \cdot 10^{-1} \\ -4{,}692\,05 \cdot 10^{-3} & -7{,}443\,0314 \cdot 10^{-1} & -6{,}677\,2526 \cdot 10^{-1} \\ 5{,}684\,5888 \cdot 10^{-1} & 5{,}473\,6303 \cdot 10^{-1} & -6{,}142\,0545 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix}.$$

На снимках измерены координаты $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ (в мм) точек:

снимок i		
точка *1*	—38,8659	— 47,3426
точка *2*	27,8853	— 83,7802
снимок k		
точка *3*	104,0280	— 77,3552
точка *4*	89,2771	—108,239 2

По этим данным требуется определить предварительные элементы орбиты на эпоху t_0.

Решение. 1. Вычислим единичные векторы в системах координат снимков:

$$\bar{\tilde{r}}^0_{i1} = \begin{bmatrix} -3{,}313\,9723 \cdot 10^{-1} \\ -4{,}036\,7537 \cdot 10^{-1} \\ -8{,}527\,73^{\wedge}4 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix}; \quad \bar{\tilde{r}}^0_{i2} = \begin{bmatrix} 2.090\,1403 \cdot 10^{-1} \\ -6.279\,7378 \cdot 10^{-1} \\ -7{,}496\,4135 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix};$$

$$\bar{\tilde{r}}^0_{k3} = \begin{bmatrix} 6{,}353\,5603 \cdot 10^{-1} \\ -4{,}724\,506^{\wedge} \cdot 10^{-1} \\ -6{,}108\,2995 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix}; \quad \bar{\tilde{r}}^0_{k4} = \begin{bmatrix} 5{,}181\,3788 \cdot 10^{-1} \\ -6{,}281\,883 \cdot 10^{-1} \\ -5{,}804\,418 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix}.$$

2. Определим топоцентрические направления иа ИСЗ в моменты t_i и t_k:

$$\bar{r}^0_{1i} = -\Pi_i^* \Pi_0 \bar{\tilde{r}}^0_{i1} = \begin{bmatrix} 1{,}259\,0155 \cdot 10^{-1} \\ -3{,}461\,9653 \cdot 10^{-1} \\ 9{,}296\,7575 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix};$$

$$\bar{r}^0_{3k} = -\Pi^*_k \Pi_0 \tilde{\bar{r}}^0_{k3} = \begin{bmatrix} -4{,}464\,8993 \cdot 10^{-1} \\ -7{,}565\,7447 \cdot 10^{-1} \\ -4{,}777\,4686 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix};$$

$$\bar{r}^0_{2i} = -\Pi^*_i \Pi_0 \tilde{\bar{r}}^0_{i2} = \begin{bmatrix} -2{,}839\,0506 \cdot 10^{-1} \\ -6{,}877\,3694 \cdot 10^{-1} \\ 6{,}681\,4369 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix};$$

$$\bar{r}^0_{4k} = -\Pi^*_k \Pi_0 \tilde{\bar{r}}^0_{k4} = \begin{bmatrix} -4{,}223\,9849 \cdot 10^{-1} \\ -8{,}527\,6359 \cdot 10^{-1} \\ -3{,}072\,0355 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix}.$$

3. Вычислим топоцентрические прямые восхождения и склонения (в угл. градусах):

$$\alpha_{1i} = \operatorname{arctg} \frac{m_{1i}}{l_{1i}} = -70{,}015\,153; \quad \alpha_{3k} = -120{,}546\,84;$$

$$\delta_{1i} = \operatorname{arctg} \frac{n_{1i}}{\sqrt{m^2_{1i} + l^2_{1i}}} = 68{,}384\,309; \quad \delta_{3k} = -28{,}538\,345;$$

$\alpha_{2i} = -112{,}431\,35$; $\alpha_{4k} = -116{,}350\,55$;

$\delta_{2i} = 41{,}923\,952$; $\delta_{4k} = -17{,}890\,781$.

4. Найдем геоцентрические инерциальные координаты ИСЗ в моменты t_i и t_k:

$$x_i = \frac{y_2 - y_1 + [x_1 \operatorname{tg} \alpha_{1i} - x_2 \operatorname{tg} \alpha_{2i}]}{\operatorname{tg} \alpha_{1i} - \operatorname{tg} \alpha_{2i}} = -4\,699\,695{,}6;$$

$$y_i = \frac{x_2 - x_1 + [y_1 \operatorname{ctg} \alpha_{1i} - y_2 \operatorname{ctg} \alpha_{2i}]}{\operatorname{ctg} \alpha_{1i} - \operatorname{ctg} \alpha_{2i}} = -2\,390\,495{,}6;$$

$$z_i' = z_1 + \sqrt{(x_i - x_1) + (y_i - y_1)} \operatorname{tg} \delta_{1i} = 4\,230\,495{,}6;$$

$$z_i'' = z_2 + \sqrt{(x_i - x_2) + (y_i - y_2)} \operatorname{tg} \delta_{2i} = 4\,230\,495{,}8;$$

$r_i = 6\,760\,075{,}2$;

$x_k = -4\,135\,936{,}3$; $y_k = -3\,600\,615{,}3$; $z_k' = -4\,191\,698{,}3$;

$z_k'' = -4\,191\,697{,}3$; $r_k = 6\,902\,226{,}3$.

5. Определим компоненты вектора-нормали к плоскости орбиты:

$$\bar{N}^0 = \begin{pmatrix} l_N \\ m_N \\ n_N \end{pmatrix} = [\bar{r}^0_i \times \bar{r}^0_k] = \frac{1}{\sin \Delta\vartheta_{ik}} \begin{bmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ l_i & m_i & n_i \\ l_k & m_k & n_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5{,}549\,2993 \cdot 10^{-1} \\ -8{,}174\,0653 \cdot 10^{-1} \\ 1{,}545\,9407 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix},$$

где $\Delta\vartheta_{ik} = \vartheta_k - \vartheta_i = 77{,}232\,08°$.

Таблица 10

Номер гипотезы	ϑ_l, угл. градус	e	a, км
1	0	$2{,}7\cdot10^{-2}$	6 948,7
2	30	$1{,}7\cdot10^{-2}$	6 867,6
3	90	$2{,}1\cdot10^{-2}$	6 763,1
4	180	$-2{,}7\cdot10^{-2}$	6 948,7
5	270	$-2{,}1\cdot10^{-2}$	6 763,1
6	345	$4{,}29\cdot10^{-2}$	7 053,0

6. Вычислим долготу восходящего узла Ω и наклонение J по формулам (427)—(431):

$$\cos J = \frac{n'_N}{|\sin\Delta\vartheta_{lk}|} = 1{,}545\,9407\cdot10^{-1}; \quad \sin J = \frac{\sqrt{l'^2_N + m'^2_N}}{|\sin\Delta\vartheta_{lk}|} =$$

$$= 9{,}879\,7807\cdot10^{-1};$$

$J=81{,}106\,75°$ при $J<90°$, поэтому

$$\cos\Omega = -\frac{m'}{\Delta} = 8{,}273\,529\cdot10^{-1}; \quad \sin\Omega = \frac{l'}{\Delta} = 5{,}616\,8242\cdot10^{-1}; \quad \Omega =$$

$$= 34{,}172\,229°.$$

7. Осуществим проведение гипотез (табл. 10) по формулам

$$e = \frac{r_k - r_l}{r_l\cos\vartheta_l - r_k\cos\vartheta_k};$$

$$a = \frac{r_l(1 + e\cos\vartheta_l)}{1 - e^2}.$$

Для данного ресурсного ИСЗ известно, что его высота $h\approx380$ км, поэтому гипотезы 1 и 2, 6 отвергаются (в соответствии с ними спутник находится значительно выше). Гипотезы 4 и 5 приводят к абсурду — эксцентриситет отрицателен. Таким образом, единственной приемлемой является гипотеза 3, согласно которой $\vartheta_l^{(0)}\approx90°$. Чтобы избежать деления на нуль при $\vartheta_l^{(0)}\approx90°$, примем для последующих итераций $\vartheta_l^{(0)}=95°$.

8. Итерационный цикл (табл. 11) выполним по формулам (437)—(445). Разность моментов фотографирования $t_k-t_l=1\,226{,}686^s$; модифицированное время $\tau=\sqrt{\mu}(t_k-t_l)=2{,}449\,0762\cdot10^{10}$; разность $r_k-r_l=142\,151{,}1$ м.

Для вычисления производной $F'(\vartheta_l)$ вычислялись варьированные a', T', $\tau(\vartheta_l+1°)$. При варьировании ϑ_l изменялась на 1°, поэтому $P'(\vartheta_l)=F(\vartheta_l+1°)-F(\vartheta_l)$.

Процесс ньютоновских итераций быстро сходится [в седьмой итерации $F(\vartheta_l)=0$]. Поэтому в качестве окончательных значений уточняемых величин принимаем их значения седьмой итерации: $\vartheta_l=108{,}588\,9°$; $\vartheta_k=185{,}820\,98°$; $e=0{,}030\,169\,88$; $a=6\,701\,160{,}1$ м; $T=5\,459{,}286\,8^s$.

Таблица 11

Определяемая величина	Номер итерации		
	1	2	3
$\vartheta_i^{(n)}$, угл. градус	95	112,715 24	109,184 06
$\vartheta_k^{(n)}$, угл. градус	172,232 08	189,947 32	186,416 14
e	—	—	—
a, м	6 750 165,4	6 679 167,0	6 698 278,1
T^s	5 519,281 6	5 432,433	5 455,765 2
$\tau(\vartheta_i)$	$2{,}432\,615\,2\cdot10^{10}$	$2{,}456\,702\,5\cdot10^{10}$	$2{,}450\,066\,2\cdot10^{10}$
a', м	6 747 343,3	6 673 018,1	6 693 233,6
T^s	5 515,820 4	5 424,933	5 449,603 6
$\tau(\vartheta_i+1^\circ)$	$2{,}433\,544\,4\cdot10^{10}$	$2{,}458\,862\,2\cdot10^{10}$	$2{,}451\,807\cdot10^{10}$
$F(\vartheta_i)$	$1{,}646\,1\cdot10^8$	—76 263 000,0	—9 900 000,0
$F(\vartheta_i+1^\circ)$	$1{,}553\,18\cdot10^8$	—97 860 000,0	—27 308 000,0
$F'(\vartheta_i)$	—9 292 000,0	—21 597 000,0	—17 408 000,0
$\frac{F(\vartheta_i)}{F'(\vartheta_i)}$	—17,715 238	3,531 184 9	$5{;}687\,040\,4\cdot10^{-1}$
$\vartheta_i^{(n+1)}$, угл. градус	112,715 24	109,184 06	108,615 36

9. Определим аргумент широты u, аргумент перицентра ω и среднюю аномалию в эпоху t_0:

$$\sin u_i = \frac{y_i \cos \Omega - x_i \sin \Omega}{r_i \cos J} = 6{,}334\,0713\cdot10^{-1};$$

$$\cos u_i = \frac{x_i \cos \Omega + y_i \sin \Omega}{r_i} = -7{,}738\,089\cdot10^{-1};$$

$u_i = 140{,}698\,05°$;

$\omega = u_k - \vartheta_i = 32{,}109\,15°$;

$$n = \frac{360°}{T^s} = 6{,}594\,2679\cdot10^{-2};$$

$$\operatorname{tg} E_i = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin\vartheta_i}{e+\cos\vartheta_i} = -3{,}282\,6746;$$

$E_i = 106{,}942\,29°$;

$M_i^{(0)} = E^{(0)} - \rho^\circ e \sin E = 105{,}288\,71°$.

$M_0^{(0)} = M_i^{(0)} - n(t_i - t_0) = 65{,}0946°$.

§ 32. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УТОЧНЕНИЕ ОРБИТЫ ИСЗ

Предварительные элементы орбиты необходимо далее уточнить, используя все исходные пункты $j=1, 2, \ldots, N$ или единичные векторы $\bar{r}_{ij}^0$ спутникоцентрических направлений, полученные за период времени $t_i - t_0$, на котором выполнялась съемка.

Номер итерации			
4	5	6	7
108,615 36	108,589 67	108,590 5	108,588 9
185,847,44	185,821 75	185,822 58	185,820 98
—	—	$3{,}017\ 115\ 7\cdot10^{-2}$	$3{,}016\ 988\ 5\cdot10^{-2}$
6 701 034,0	6 701 156,6	6 701 152,5	6 701 160,1
5 459,132 6	5 459,282 8	5 459,277 8	5,459,286 8
$2{,}449\ 119\ 5\cdot10^{10}$	$2{,}449\ 077\ 6\cdot10^{10}$	$2{,}449\ 078\ 9\cdot10^{10}$	$2{,}449\ 076\ 2\cdot10^{10}$
6 696 134,8	6 696 263,5	6 696 260,2	6 696 268,2
5 453,146 8	5 453,304 2	5 453,300 4	5 453,309 8
$2{,}450\ 849\cdot10^{10}$	$2{,}450\ 760\ 3\cdot10^{10}$	$2{,}450\ 762\ 3\cdot10^{10}$	$2{,}450\ 759\ 4\cdot10^{10}$
—433 000,0	—14 000,0	—27 000,0	0,0
—17 287 000,0	—16 841 000,0	—16 861 000,0	—
—16 854 000,0	—16 827 000,0	—16 834 000,0	—
$2{,}569\ 123\cdot10^{-2}$	$8{,}319\ 961\ 9\cdot10^{-4}$	$1{,}603\ 896\ 8\cdot10^{-3}$	—
108,589 67	108,590 5	108,588 9	

Для вывода необходимых соотношений обратимся к линеаризированному основному уравнению космической фотограмметрии (191). Будем полагать, что внешняя ориентация снимков выполнена с помощью звездной камеры, а координаты пунктов поверхности не определены. В этом случае $\underset{(3,1)}{\bar{\delta}_{ij}^{(1)}} = 0$; $\underset{(3,1)}{\ddot{\delta}_j} = 0$ и уравнение (191) в инерциальной системе координат будет иметь вид

$$\underset{(2,1)}{\begin{bmatrix} d\tilde{x}_j \\ d\tilde{y}_j \end{bmatrix}} = \underset{(2,3)}{\hat{\mathbf{B}}_{ij}^{(2)}} \underset{(3,1)}{\hat{\delta}_{ij}^{(2)}} = \underset{(2,3)}{\begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_i} & \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial y_i} & \frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial z_i} \\ \frac{\partial \tilde{y}_j}{\partial x_i} & \frac{\partial \tilde{y}_j}{\partial y_i} & \frac{\partial \tilde{y}_j}{\partial z_i} \end{bmatrix}} \underset{(3,1)}{\begin{bmatrix} dx_i \\ dy_i \\ dz_i \end{bmatrix}}. \qquad (450)$$

Координаты x_i, y_i, z_i являются функциями начальных условий движения x_0, y_0, z_0, $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$, поэтому

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial x_i}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial x_i}{\partial z_0} dz_0 + \frac{\partial x_i}{\partial \dot{x}_0} d\dot{x}_0 +$$

$$+ \frac{\partial x_i}{\partial \dot{y}_0} d\dot{y}_0 + \frac{\partial x_i}{\partial \dot{z}_0} d\dot{z}_0;$$

$$dy_i = \frac{\partial y_i}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial y_i}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial y_i}{\partial z_0} dz_0 +$$

$$+\frac{\partial y_i}{\partial \dot{x}_0}d\dot{x}_0+\frac{\partial y_i}{\partial y_0}dy_0+\frac{\partial y_i}{\partial \dot{y}_0}d\dot{y}_0+\frac{\partial y_i}{\partial \dot{z}_0}d\dot{z}_0; \tag{451}$$

$$dz_i=\frac{\partial z_i}{\partial x_0}dx_0+\frac{\partial z_i}{\partial y_0}dy_0+\frac{\partial z_i}{\partial z_0}dz_0+$$

$$+\frac{\partial z_i}{\partial \dot{x}_0}d\dot{x}_0+\frac{\partial z_i}{\partial \dot{y}_0}d\dot{y}_0+\frac{\partial z_i}{\partial \dot{z}_0}d\dot{z}_0.$$

Введем матрицу

$$\underset{(3,6)}{\overset{0}{\mathbf{B}}}_i=\frac{\partial(x_i,\ y_i,\ z_i)}{\partial(x_0,\ y_0,\ z_0,\ \dot{x}_0,\ \dot{y}_0,\ \dot{z}_0)}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x_i}{\partial x_0} & \frac{\partial x_i}{\partial y_0} & \frac{\partial x_i}{\partial z_0} & \frac{\partial x_i}{\partial \dot{x}_0} & \frac{\partial x_i}{\partial \dot{y}_0} & \frac{\partial x_i}{\partial \dot{z}_0}\\ \frac{\partial y_i}{\partial x_0} & \frac{\partial y_i}{\partial y_0} & \frac{\partial y_i}{\partial z_0} & \frac{\partial y_i}{\partial \dot{x}_0} & \frac{\partial y_i}{\partial \dot{y}_0} & \frac{\partial y_i}{\partial \dot{z}_0}\\ \frac{\partial z_i}{\partial x_0} & \frac{\partial z_i}{\partial y_0} & \frac{\partial z_i}{\partial z_0} & \frac{\partial z_i}{\partial \dot{x}_0} & \frac{\partial z_i}{\partial \dot{y}_0} & \frac{\partial z_i}{\partial \dot{z}_0}\end{bmatrix} \tag{452}$$

и вектор $\underset{(6,1)}{\bar{\delta}}=(dx_0,\ dy_0,\ dz_0,\ d\dot{x}_0,\ d\dot{y}_0,\ d\dot{z}_0)^{\mathrm{T}}$. Подставив dx_i, dy_i и dz_i из формул (451) в (450), получим:

$$\begin{bmatrix}d\tilde{x}_{ij}\\ d\tilde{y}_{ij}\end{bmatrix}=\underset{(2,3)}{\widehat{\mathbf{B}}^{(2)}_{ij}}\ \underset{(3,6)}{\overset{0}{\mathbf{B}}}_i\ \underset{(6,1)}{\bar{\delta}}=\begin{bmatrix}\frac{\partial\tilde{x}_{ij}}{\partial x_i} & \frac{\partial\tilde{x}_{ij}}{\partial y_i} & \frac{\partial\tilde{x}_{ij}}{\partial z_i}\\ \frac{\partial\tilde{y}_{ij}}{\partial x_i} & \frac{\partial\tilde{y}_{ij}}{\partial y_i} & \frac{\partial\tilde{y}_{ij}}{\partial z_i}\end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}\frac{\partial x_i}{\partial x_0} & \frac{\partial x_i}{\partial y_0} & \frac{\partial x_i}{\partial z_0} & \frac{\partial x_i}{\partial \dot{x}_0} & \frac{\partial x_i}{\partial \dot{y}_0} & \frac{\partial x_i}{\partial \dot{z}_0}\\ \frac{\partial y_i}{\partial x_0} & \frac{\partial y_i}{\partial y_0} & \frac{\partial y_i}{\partial z_0} & \frac{\partial y_i}{\partial \dot{x}_0} & \frac{\partial y_i}{\partial \dot{y}_0} & \frac{\partial y_i}{\partial \dot{z}_0}\\ \frac{\partial z_i}{\partial x_0} & \frac{\partial z_i}{\partial y_0} & \frac{\partial z_i}{\partial z_0} & \frac{\partial z_i}{\partial \dot{x}_0} & \frac{\partial z_i}{\partial \dot{y}_0} & \frac{\partial z_i}{\partial \dot{z}_0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}dx_0\\ dy_0\\ dz_0\\ d\dot{x}_0\\ d\dot{y}_0\\ d\dot{z}_0\end{bmatrix}. \tag{453}$$

Уравнение (453) является основным при определении начальных условий движения ИСЗ по результатам фотограмметрической обработки космических снимков, где $\underset{(3,6)}{\overset{0}{\mathbf{B}}}_i$—матрица изохронных производных; $\underset{(6,1)}{\bar{\delta}}$—вектор поправок начальных условий.

Рассмотрим другую форму уравнения (453), когда в качестве уточняемых величин используют не координаты и составляющие скорости в момент t_0, а некоторые модификации элементов кеплe-

Таблица 12

Производная	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
$\frac{\partial x_t}{\partial E_k}$	0	z_t	$-\frac{\dot{x}_t}{n}+y_t$	$x_t-\frac{3}{2}(t_t-t_0)\dot{x}_t$	$Hx_t+K\dot{x}_t$	$\frac{\dot{x}_t}{n}$
$\frac{\partial y_t}{\partial E_k}$	$-z_t$	0	$-\frac{\dot{y}_t}{n}+x_t$	$y_t-\frac{3}{2}(t_t-t_0)\dot{y}_t$	$Hy_t+K\dot{y}_t$	$\frac{\dot{y}_t}{n}$
$\frac{\partial z_t}{\partial E_k}$	y_t	$-x_t$	$-\frac{\dot{z}_t}{n}$	$z_t-\frac{3}{2}(t_t-t_0)\dot{y}_t$	$Hz_t+K\dot{z}_t$	$\frac{\dot{z}_t}{n}$

ровой орбиты. Поскольку орбиты картографических и ресурсных ИСЗ, как правило, обладают малыми эксцентриситетами, то аргумент перицентра ω определяется неточно, а при $e\to 0$ положение перицентра вообще становится неопределенным. Вектор $\Delta\bar{\Psi}$ элементарного поворота (105) направлен по мгновенной оси вращения. Его составляющие $\Delta\psi_x$, $\Delta\psi_y$ и $\Delta\psi_z$ по осям инерциальной системы координат примем в качестве поправок уточняемых угловых элементов орбиты, т. е. будем их применять вместо $\Delta\Omega$, ΔJ и $\Delta\omega$. Тогда на основании формул (112) связь между $\Delta\psi_x$, $\Delta\psi_y$ и $\Delta\psi_z$ и $\Delta\Omega$, ΔJ, $\Delta\omega$ выразим в виде

$$\begin{aligned} d\psi_x &= \cos\Omega dJ+\sin J\sin\Omega d\omega;\\ d\psi_y &= \sin\Omega dJ-\sin J\cos\Omega d\omega;\\ d\psi_z &= d\Omega+\cos J d\omega. \end{aligned} \tag{454}$$

Используем также формулы обратного перехода:

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= (\Delta\psi_x\sin\Omega-\Delta\psi_y\cos\Omega)\operatorname{cosec} J;\\ \Delta J &= \Delta\psi_x\cos\Omega+\Delta\psi_y\sin\Omega;\\ \Delta\Omega &= \Delta\psi_z-\Delta\omega\cos J. \end{aligned} \tag{455}$$

В качестве уточняемых элементов $E_1, E_2, \ldots, E_6$ примем ψ_x, ψ_y, ψ_z, $\ln a$, e и $M_0+\psi_z$.

Требуется определить поправки $\Delta\psi_x$, $\Delta\psi_y$, $\Delta\psi_z$, $\frac{\Delta a}{a}$, Δe и $\Delta(M_0+\psi_z)$.

В теоретической астрономии выведены формулы для производных (табл. 12), входящих в матрицу

$$\underset{(3.6)}{\overset{0}{\mathbf{B}'}}=\frac{\partial(x,\ y,\ z)}{\partial(\Psi_x,\ \Psi_y,\ \Psi_z,\ \ln a,\ e,\ M_0+\Psi_z)_{t=t_0}}. \tag{456}$$

Величины H и K, входящие в производные по эксцентриситету, представим в виде:

$$H = \frac{r - a(1+e^2)}{ae(1-e^2)}; \quad K = \frac{as}{\mu e}\left[1 + \frac{r}{a(1-e^2)}\right]; \qquad (457)$$
$$s = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}.$$

Если в процессе дифференциального уточнения орбиты определены элементы ψ_x, ψ_y, ψ_z, $\ln a$, e и $M_0+\psi_z$, то уравнение (453) преобразуем следующим образом:

$$\begin{bmatrix} dx_{ij} \\ dy_{ij} \end{bmatrix} = \underset{(2,3)}{\widehat{\mathbf{B}}_{ij}^{(2)}} \underset{(3,6)}{\mathbf{B}_i^{0'}} \underset{(6,1)}{\bar{\delta}^{0'}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial x_i} & \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial y_i} & \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial z_i} \\ \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial x_i} & \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial y_i} & \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial z_i} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial \Psi_x} & \frac{\partial x_i}{\partial \Psi_y} & \frac{\partial x_i}{\partial \Psi_z} & \frac{\partial x_i}{\partial \ln a} & \frac{\partial x_i}{\partial e} & \frac{\partial x_i}{\partial (M_0+\Psi_z)} \\ \frac{\partial y_i}{\partial \Psi_x} & \frac{\partial y_i}{\partial \Psi_y} & \frac{\partial y_i}{\partial \Psi_z} & \frac{\partial y_i}{\partial \ln a} & \frac{\partial y_i}{\partial e} & \frac{\partial y_i}{\partial (M_0+\Psi_z)} \\ \frac{\partial z_i}{\partial \Psi_x} & \frac{\partial z_i}{\partial \Psi_y} & \frac{\partial z_i}{\partial \Psi_z} & \frac{\partial z_i}{\partial \ln a} & \frac{\partial z_i}{\partial e} & \frac{\partial z_i}{\partial (M_0+\Psi_z)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\Psi_x \\ \Delta\Psi_y \\ \Delta\Psi_z \\ \frac{\Delta a}{a} \\ \Delta e \\ \Delta M_0 + \Delta\Psi_z \end{bmatrix}, \qquad (458)$$

где $\underset{(6,1)}{\bar{\delta}^{0'}} = \left[\Delta\Psi_x \Delta\Psi_y \Delta\Psi_z \frac{\Delta a}{a} \Delta e \Delta M_0 + \Delta\Psi_z\right]^T$.

Для каждой точки j, измеренной на снимке, можно составить два уравнения поправок:

$$\underset{(2,3)}{\widehat{\mathbf{B}}_{ij}^{(2)}} \underset{(3,6)}{\mathbf{B}_i^{0'}} \underset{(6,1)}{\bar{\delta}^{0'}} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_{ij}^0 - \tilde{x}_{ij}^{00} \\ \tilde{y}_{(ij)}^0 - \tilde{y}_j^{00} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vartheta_x \\ \vartheta_y \end{pmatrix} = \underset{(2,3)}{\bar{\varepsilon}_{ij}} + \underset{(2,1)}{\bar{\vartheta}}, \qquad (459)$$

где $\tilde{x}_{ij}^0$, $\tilde{y}_{ij}^0$ —измеренные на снимке координаты точки j; $\tilde{x}_{ij}^{00}$, $\tilde{y}_i^{00}$ — приближенные координаты на снимке, точно соответствующие предварительным значениям уточняемых элементов; ϑ_x, ϑ_y— поправки в измеренные координаты.

Каждой паре уравнений поправок будет соответствовать весовая матрица $\underset{(2,2)}{\mathbf{P}_j} = \underset{(2,2)}{\mathbf{K}_j^{-1}}$, где $\underset{(2,2)}{\mathbf{K}_j}$ определяется формулой (271). Для того чтобы приближенные значения координат точек снимка $\tilde{x}_{ij}^{00}$, $\tilde{y}_{ij}^{00}$ соответствовали предварительным значениям уточняемых элементов, необходимо точно, с учетом всех возмущающих факторов выполнить интегрирование дифференциальных уравне-

ний движения на моменты фотографирования t_i и определить приближенные x_t^{00}, y_i^{00} и z_i^{00} инерциальные координаты ИСЗ. Затем приближенные координаты $\tilde{x}_{ij}^{00}$ и $\tilde{y}_{ij}^{00}$ точек снимка вычислить по формулам (423).

Пусть в обработку включено $j=1, 2, ..., N$ точек, изобразившихся на $i=1, 2, ..., M$ снимках. Введем обозначения:

$$a_x = \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial \Psi_x} = \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \Psi_x} + \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial \Psi_x} + \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial \Psi_x};$$

$$a_y = \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial \Psi_y} = \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \Psi_x} + \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial \Psi_x} + \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial \Psi_x};$$

$$b_x = \frac{\partial x_{ij}}{\partial \Psi_y} = \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \Psi_y} + \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial \Psi_y} + \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial \Psi_y};$$

$$b_y = \frac{\partial y_{ij}}{\partial \Psi_y} = \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \Psi_y} + \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial \Psi_y} + \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial \Psi_y};$$

$$c_x = \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial \Psi_z} = \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \Psi_z} + \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial \Psi_z} + \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial \Psi_z};$$

$$c_y = \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial \Psi_z} = \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \Psi_z} + \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial \Psi_z} + \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial \Psi_z};$$

$$d_x = \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial (\ln a)} = \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial (\ln a)} + \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial (\ln a)} + \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial (\ln a)};$$

$$d_y = \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial (\ln a)} = \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial (\ln a)} + \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial (\ln a)} + \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial (\ln a)};$$

$$e_x = \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial e} = \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial e} + \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial e} + \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial e};$$

$$e_y = \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial e} = \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial e} + \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial e} + \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial e};$$

$$f_x = \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial (M_0 + \Psi_z)} = \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial (M_0 + \Psi_z)} + \frac{\partial x_i}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial (M_0 + \Psi_z)} + \frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial (M_0 + \Psi_z)};$$

$$f_y = \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial (M_0 + \Psi_z)} = \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial (M_0 + \Psi_z)} + \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial y_i}\frac{\partial y_i}{\partial (M_0 + \Psi_z)} + \frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial (M_0 + \Psi_z)}.$$

(460)

Матрица уравнений поправок **A**, составленная для всех точек, включенных в обработку (N, 6), будет следующей:

$$\underset{(N,6)}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{x_1} & b_{x_1} & c_{x_1} & d_{x_1} & e_{x_1} & f_{x_1} \\ a_{y_1} & b_{y_1} & c_{y_1} & d_{y_1} & e_{y_1} & f_{y_1} \\ a_{x_2} & b_{x_2} & c_{x_2} & d_{x_2} & e_{x_2} & f_{x_2} \\ a_{y_2} & b_{y_2} & c_{y_2} & d_{y_2} & e_{y_2} & f_{y_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{xN} & b_{xN} & c_{xN} & d_{xN} & e_{xN} & f_{xN} \\ a_{yN} & b_{yN} & c_{yN} & d_{yN} & e_{yN} & f_{yN} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \textit{точка 2} \\ \\ \\ \\ \textit{точка N} \end{matrix} \quad \textit{точка 1} \tag{462}$$

Матрице $\underset{(N,6)}{\mathbf{A}}$ будет соответствовать ковариационная матрица измеренных координат на снимках

$$\underset{(2N,2N)}{\mathbf{K}} = \operatorname{diag}[\underset{(2,2)}{\mathbf{K}_1}, \underset{(2,2)}{\mathbf{K}_2}, \ldots, \underset{(2,2)}{\mathbf{K}_N}]. \tag{463}$$

Выпишем формулы для частных производных, входящих в уравнения (460). Производные координат точек снимка $\tilde{x}_{ij}$, $\tilde{y}_{ij}$ по инерциальным координатам x_i, y_i, z_i будут следующими:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial x_i} &= -\chi_{ij}[a_{23}(y_j - y_i) - a_{22}(z_j - z_i)]; \\
\frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial y_i} &= -\chi_{ij}[-a_{23}(x_j - x_i) + a_{21}(z_j - z_i)]; \\
\frac{\partial \tilde{x}_{ij}}{\partial z_i} &= -\chi_{ij}[a_{22}(x_j - x_i) + a_{21}(y_j - y_i)]; \\
\frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial x_i} &= -\chi_{ij}[-a_{13}(y_j - y_i) + a_{12}(z_j - z_i)]; \\
\frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial y_i} &= -\chi_{ij}[a_{13}(x_j - x_i) - a_{11}(z_j - z_i)]; \\
\frac{\partial \tilde{y}_{ij}}{\partial z_i} &= -\chi_{ij}[-a_{12}(x_j - x_i) + a_{11}(z_j - z_i)],
\end{aligned} \tag{464}$$

где

$$\chi_{ij} = \frac{f_t}{W_{ij}^2}; \quad W_{ij} = a_{31}(x_j - x_i) + a_{32}(y_j - y_i) + a_{33}(z_j - z_i). \tag{465}$$

В формулах (464)—(465) величины a_{lk} являются элементами матрицы $\mathbf{\Pi}_l$:

$$\mathbf{\Pi}_l = (\mathbf{\Pi}_l^* \mathbf{\Pi}_0)^{\mathrm{T}}. \tag{466}$$

Производные инерциальных координат ИСЗ x_i, y_i, z_i по уточняемым элементам ψ_x, ψ_y, ψ_z, $\ln a$, e, $M_0 + \psi_z$ определяют по формулам теоретической астрономии (см. табл. 11).

Общее решение выполняют по методу наименьших квадратов:

$$\underset{(6,1)}{(\bar{\delta}^{0\prime})_{k+1}} = \begin{pmatrix} \Delta\Psi_x \\ \Delta\Psi_y \\ \Delta\Psi_z \\ \dfrac{\Delta a}{a} \\ \Delta e \\ \underset{(6,1)}{\Delta M_0 + \Delta\Psi_z} \end{pmatrix}_{k+1} = \underset{(6,6)}{[\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{A}]_k^{-1}} \underset{(6,2N)(2N,1)}{\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}} \bar{\varepsilon}_k} = \underset{(6,6)}{\mathbf{B}_k^{-1}} \underset{(6,2N)(2N,1)}{\mathbf{A}_k^{\mathrm{T}} \bar{\varepsilon}_k}, \tag{467}$$

где k — номер ньютоновской итерации. Итерационный процесс заканчивается, когда в пределах точности вычислений значения элементов вектора поправок практически перестают изменяться.

После выполнения последней итерации переходят к оценке точности и вычисляют:

ошибку единицы веса

$$m_0^2 = \frac{\vartheta^{\mathrm{T}} P \vartheta}{2N - 6}; \tag{468}$$

ошибки определения элементов орбиты:

$$\begin{aligned} m_{\Psi_x} &= m_0 \sqrt{q_{11}}; \quad m_a = a m_0 \sqrt{q_{44}}; \\ m_{\Psi_y} &= m_0 \sqrt{q_{22}}; \quad m_e = m_0 \sqrt{q_{55}}; \\ m_{\Psi_z} &= m_0 \sqrt{q_{33}}; \quad m_{M_0 + \Psi_z} = m_0 \sqrt{q_{66}}, \end{aligned} \tag{469}$$

где q_{kk} — диагональные элементы обратной матрицы $\underset{(6,6)}{\mathbf{B}^{-1}}$ нормальных уравнений.

Пример 17. В качестве предварительных параметров примем систему элементов, полученную в примере 16: $a = 6\,701\,160{,}1$; $e = 0{,}030\,169\,88$; $\Omega = 34{,}172\,229°$; $J = 81{,}106\,75°$; $\omega = 32{,}109\,15°$; $M_0 = 65{,}0946°$.

Исходной информацией для дифференциального уточнения являются координаты шести точек (табл. 13), измеренных на двух топографических снимках, полученных в моменты $t_l - t_0 = 0\,609{,}531^s$ и $t_k - t_0 = 1{,}836{,}217^s$.

Съемка выполнялась топографической камерой с $f_t = 100{,}0123$ мм. Операторы ориентации $\mathbf{\Pi}_i^* \mathbf{\Pi}_0$ и $\mathbf{\Pi}_k \mathbf{\Pi}_0$ те же, что в примере 16.

Решение.

I. Вычисление свободных членов уравнений поправок.

Таблица 13

Номер точки	$\tilde{x}^0$, мм	$\tilde{y}^0$, мм
	снимок i	
1	—3,5041	—55,3157
2	—38,8659	—47,3426
3	27,8853	—83,7802
	снимок k	
4	104,0280	—77,3552
5	89,2771	—108,2392
6	121,5853	—91,8231

Таблица 14

Определяемая величина	$t_{i=609,531^s}$	$t_{k=1836,217^s}$
x, м	—4 699 749,8	—4 135 867,4
y, м	—2 390 531,9	—3 600 585,7
z, м	4 230 405,9	—4 191 791,4
$\dot{x}$, м/с	—3 641,614 1	4 333,125 5
$\dot{y}$, м/с	—3 553,113 5	1 841,358 6
$\dot{z}$, м/с	—5 704,185 2	—5 818,094 7
r, м	6 760 075,3	6 902 226,3
P, м	6 695 060,7	6 595 060,7
T^s	5 459,287^s	5 459,287^s

Таблица 15

Номер точки	x_j, м	y_j, м	z_j, м
	снимок i		
1	—4 682 655,3	—2 072 098,6	3 791 885,6
2	—4 754 045,5	—2 241 030,1	3 829 168,8
3	—4 569 751,4	—2 075 698,3	3 924 687,9
	снимок k		
4	—3 885 391,3	—3 176,069,0	—3 923 614,0
5	—3 878 644,2	—3 081 179,2	—4 004 572,9
6	—3 851 373,3	—3 189 247,3	—3 946 253,3

Таблица 16

Номер точки	(x_j-x_i), м	(y_j-y_i), м	(z_j-z_i), м
	момент t_i		
1	17 094,5	318 433,3	—438 520,3
2	—54 295,7	149 501,6	—401 237,1
3	129 998,4	314 833,6	—305 718,0
	момент t_k		
4	250 476,1	424 516,7	268 177,4
5	257 223,2	519 406,5	187 218,5
6	284 494,1	411 338,4	245 538,1

Таблица 17

Номер точки	x_{ij}^{00}, мм	y_{ij}^{00}, мм	χ_{ij}
	момент t_i		
1	—3,483 539 5	—55,390 585	$4{,}449\,474\,9\cdot10^{-10}$
2	—38,840 26	—47,348 106	$7{,}381\,596\cdot10^{-10}$
3	27,921 709	—83,790 473	$8{,}497\,449\,1\cdot10^{-10}$
	момент t_k		
4	104,006 93	—77,311 295	$8{,}509\,379\,9\cdot10^{-10}$
5	89,259 443	—108,190 41	$7{,}997\,684\,3\cdot10^{-10}$
6	121,558 62	—91,767 342	$1{,}069\,376\cdot10^{-9}$

Таблица 18

Номер точки	$^{s}x_{ij}$, м	$^{s}y_{ij}$, мм
	снимок i	
1	$-2{,}056\,05\cdot10^{-2}$	$7{,}485\cdot10^{-3}$
2	$-2{,}564\cdot10^{-2}$	$5{,}506\cdot10^{-3}$
3	$-3{,}640\,9\cdot10^{-2}$	$1{,}027\,3\cdot10^{-2}$
	снимок k	
4	$2{,}107\cdot10^{-2}$	$-4{,}390\,5\cdot10^{-2}$
5	$1{,}765\,7\cdot10^{-2}$	$-4{,}879\cdot10^{-2}$
6	$2{,}668\cdot10^{-2}$	$-5{,}575\,8\cdot10^{-2}$

1. Определим координаты и составляющие скорости ИСЗ (табл. 14) на моменты времени t_i и t_k, полученные в результате точного интегрирования дифференциальных уравнений движения.

2. Вычислим инерциальные координаты x_j, y_j и z_j исходных пунктов (табл. 15).

3. Вычислим приращения x_j-x_i, y_j-y_i, z_j-z_i инерциальных координат (табл. 16).

Таблица 19

Формула	Значение производной в момент времени t_i	Значение производной в момент времени t_k
$\frac{\partial x}{\partial \Psi_x} = 0$	0,0	0,0
$\frac{\partial x}{\partial \Psi_y} = z$	4 230 405,9	— 4 191 791,4
$\frac{\partial x}{\partial \Psi_z} = -y - \frac{\dot{x}}{n}$	5 557 236,9	— 164 348,0
$\frac{\partial x}{\partial (\ln a)} = x - \frac{3}{2}(t - t_0)\dot{x}$	— 1 367 491,1	— 16 070 705,0
$\frac{\partial x}{\partial e} = Hx + K\dot{x}$	— 7 316 851,0	— 4 791 220,1
$\frac{\partial x}{\partial (M_0 + \Psi_z)} = \frac{\dot{x}}{n}$	— 3 166 705,0	3 764 933,7
$\frac{\partial y}{\partial \Psi_x} = -z$	— 4 230 405,9	4 191 791,4
$\frac{\partial y}{\partial \Psi_y} = 0$	0	0
$\frac{\partial y}{\partial \Psi_z} = x - \frac{\dot{y}}{n}$	— 1 612 547,1	— 5 735 773,3
$\frac{\partial y}{\partial (\ln a)} = y - \frac{3}{2}(t - t_0)\dot{y}$	858 067,3	— 8 672 286,5
$\frac{\partial y}{\partial e} = Hy + K\dot{y}$	— 6 560 197,0	— 3 815 001,3
$\frac{\partial y}{\partial (M_0 + \Psi_z)} = \frac{\dot{y}}{n}$	— 3 087 202,7	1 599 905,9
$\frac{\partial z}{\partial \Psi_x} = y$	— 2 390 405,9	— 3 600 585,7
$\frac{\partial z}{\partial \Psi_y} = -x$	4 699 749,8	4 135 867,4
$\frac{\partial z}{\partial \Psi_z} = \frac{\dot{z}}{n}$	4 956 209,8	5 055 182,7
$\frac{\partial z}{\partial (\ln a)} = z - \frac{3}{2}(t - t_0)\dot{z}$	9 445 722,2	11 833 313,5

Продолжение табл. 19

Формула	Значение производной в момент времени	
	t_l	t_k
$\frac{\partial z}{\partial e} = Hz + k\dot{z}$	— 8 422 115,0	— 2 973 049,9
$\frac{\partial z}{\partial (M_0 + \Psi z)} = \frac{\dot{z}}{n}$	— 4 956 209,8	— 5 055 182,7
$H = \frac{r - a(1+e^2)}{ae(1-e^2)}$	$2{,}614\,786\,8 \cdot 10^{-1}$	$9{,}652\,337\,2 \cdot 10^{-1}$
$K = \frac{as}{\mu e}\left[1 + \frac{r}{a(1-e^2)}\right]$	1 670,400 9	— 184,426 1

Таблица 20

Момент времени	Номер точки	$\frac{\partial \tilde{x}_{lj}}{\partial x}$	$\frac{\partial \tilde{x}_{lj}}{\partial y}$	$\frac{\partial \tilde{x}_{lj}}{\partial z}$
t_l	1	$-6{,}584\,148 \cdot 10^{-5}$	$-1{,}610\,469\,1 \cdot 10^{-4}$	$-1{,}195\,115\,2 \cdot 10^{-4}$
	2	$-4{,}435\,122\,2 \cdot 10^{-5}$	$-2{,}718\,656\,1 \cdot 10^{-4}$	$-9{,}529\,607\,1 \cdot 10^{-4}$
	3	$-1{,}295\,419\,5 \cdot 10^{-4}$	$-1{,}611\,501\,8 \cdot 10^{-4}$	$-2{,}210\,394\,4 \cdot 10^{-4}$
t_k	1	$-3{,}676\,002\,6 \cdot 10^{-4}$	$2{,}039\,421\,6 \cdot 10^{-4}$	$2{,}050\,220\,3 \cdot 10^{-5}$
	2	$-3{,}388\,363\,5 \cdot 10^{-4}$	$1{,}698\,686\,8 \cdot 10^{-4}$	$-5{,}738\,370\,3 \cdot 10^{-6}$
	3	$-4{,}362\,287\,4 \cdot 10^{-4}$	$2{,}669\,473\,8 \cdot 10^{-4}$	$5{,}823\,451\,6 \cdot 10^{-5}$
Момент времени	Номер точки	$\frac{\partial \tilde{y}_{lj}}{\partial x}$	$\frac{\partial \tilde{y}_{lj}}{\partial y}$	$\frac{\partial \tilde{y}_{lj}}{\partial z}$
t_l	1	$2{,}276\,841\,7 \cdot 10^{-4}$	$-6{,}823\,063 \cdot 10^{-5}$	$-4{,}067\,207\,9 \cdot 10^{-5}$
	2	$2{,}840\,586\,6 \cdot 10^{-4}$	$-7{,}322\,837\,9 \cdot 10^{-5}$	$-6{,}572\,407\,8 \cdot 10^{-5}$
	3	$3{,}495\,098\,6 \cdot 10^{-4}$	$-1{,}498\,250\,7 \cdot 10^{-5}$	$-5{,}672\,693\,1 \cdot 10^{-6}$
t_k	1	$2{,}064\,193\,4 \cdot 10^{-4}$	$6{,}658\,058\,9 \cdot 10^{-5}$	$-2{,}981\,894\,8 \cdot 10^{-4}$
	2	$2{,}368\,431\,6 \cdot 10^{-4}$	$6{,}241\,032\,7 \cdot 10^{-6}$	$-3{,}427\,181\,9 \cdot 10^{-4}$
	3	$2{,}512\,830\,9 \cdot 10^{-4}$	$4{,}307\,510\,6 \cdot 10^{-5}$	$-3{,}633\,122\,6 \cdot 10^{-4}$

4. Определим приближенные координаты $\bar{x}_{lj}^{00}$ и $\bar{y}_{lj}^{00}$ на снимках (табл. 17).

5. Вычислим свободные члены уравнений поправок (табл. 18) по формулам $\varepsilon_{x_{lj}} = \tilde{x}_{lj}^{0} - \tilde{x}_{lj}^{0}$; $\varepsilon_{y_{lj}} = \tilde{y}_{lj}^{0} - \tilde{y}_{lj}^{00}$.

II. Вычисление коэффициентов уравнений поправок

1. Определим производные инерциальных координат по элементам орбиты (табл. 19).

2. Вычислим производные координат точек снимка $\tilde{x}_{ij}$, $\tilde{y}_{ij}$ по инерциальным координатам ИСЗ (табл. 20).

3. Определим производные координаты точек снимка $\tilde{x}_{ij}$, $\tilde{y}_{ij}$ по уточняемым элементам в виде матрицы **A** (табл. 21).

4. Составим матрицу нормальных уравнений $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$.

(6, 6)

Весовая матрица **P** принята единичной. Приведем верхнюю треугольную матрицу.

$$\mathbf{B} =$$

ψ_x	ψ_y	ψ_z	$\ln a$	e	$M_0+\psi_z$
22 544 925	—22 580 561	—26 185 418	—58 091 324	44 247 449	30 353 495
	54 121 170	37 898 414	125 191 360	—52 779 627	—57 352 722
		46 052 619	74 512 697	—60 749 285	—43 588 994
			348 980 530	—82 100 640	—137 402 840
				1,310 545 3$\times$ $\times 10^8$	64 950 315
					64 181 794

5. Определим обратную матрицу нормальных уравнений $\mathbf{B}^{-1}$.

$$\mathbf{B}^{-1} =$$

ψ_x	ψ_y	ψ_z	$\ln a$	e	$M_0+\psi_z$
0,286 3$\times$ $\times 10^{-2}$	—0,427 9$\times$ $\times 10^{-2}$	0,834 1$\times$ $\times 10^{-3}$	0,159 6$\times$ $\times 10^{-3}$	—0,436 7$\times$ $\times 10^{-4}$	—0,422 5$\times$ $\times 10^{-2}$
	0,639 6$\times$ $\times 10^{-2}$	—0,124 6$\times$ $\times 10^{-2}$	—0,238 0$\times$ $\times 10^{-3}$	0,648 7$\times$ $\times 10^{-4}$	0,631 7$\times$ $\times 10^{-2}$
		0,243 1$\times$ $\times 10^{-3}$	0,468 7$\times$ $\times 10^{-4}$	—0,128 5$\times$ $\times 10^{-4}$	—0,123 0$\times$ $\times 10^{-2}$
			0,942 2$\times$ $\times 10^{-5}$	—0,288 5$\times$ $\times 10^{-5}$	—0,233 4$\times$ $\times 10^{-3}$
				0,107 5$\times$ $\times 10^{-5}$	0,626 3$\times$ $\times 10^{-4}$
					0,624 4$\times$ $\times 10^{-2}$

6. Найдем поправки в определяемые параметры (в радианах). Получим $\Delta\psi_x = 0{,}3532 \cdot 10^{-5}$; $\Delta\psi_y = -0{,}3945 \cdot 10^{-5}$;

$$\Delta\psi_z = -0{,}3115 \cdot 10^{-5}; \quad \frac{\Delta a}{a} = -0{,}2965 \cdot 10^{-4};$$

$\Delta e = 0{,}3089 \cdot 10^{-4}$; $\Delta(M_0+\psi_z) = -0{,}1143 \cdot 10^{-5}$.

7. Сумма квадратов поправок в результаты измерения координат на снимках составит

$$\vartheta^T\vartheta = [\vartheta^2] = 0{,}3567 \cdot 10^{-2}.$$

8. Вычислим ошибку единицы веса μ: $\mu = \sqrt{\frac{\vartheta^2}{6}} = 0{,}024$ мм.

Таблица 21

Номер точки	a_x, a_y, мм	b_x, b_y, мм	c_x, c_y, мм	d_x, d_y, мм	e_x, e_y, мм	f_x, f_y, мм	ε_x, ε_y, мм
1	966,974 83 385,876 33	−840,210 43 772,047 85	−698,525 14 1 173,744 5	−1 177,024 −754,081 79	2 532,940 1 −834,780 8	1 298,009 2 −308,779 93	$-2{,}056\ 05\cdot10^{-2}$ $7{,}485\cdot10^{-2}$
2	3 428,064 8 466,892 99	−4 666,300 6 892,796 7	−4 531,147 3 1 370,923 2	−9 174,031 2 −1 072,093 9	10 133,948 −1 044,486 6	5 702,824 7 −347,716 8	$-2{,}564\cdot10^{-2}$ $5{,}506\cdot10^{-3}$
3	1 210,104 7 647,380 9	−1 586,845 1 1 451,908 4	−1 552,96 +2 148,803 8	−2 049,007 3 −660,094 29	3 866,635 6 −1 526,653 5	2 003,242 2 −616,139 14	$-3{,}640\ 9\cdot10^{-2}$ $1{,}027\ 3\cdot10^{-2}$
4	781,063 05 1 352,748 7	1 625,694 3 −2 098,485 3	−1 005,709 2 −1 923,218 1	4 381,555 8 −7 423,226 5	922,260 13 −356,473 3	−1 161,342 6 2 391,050 3	$2{,}107\cdot10^{-2}$ $-4{,}390\ 5\cdot10^{-2}$
5	732,715 56 1 260,147 3	1 396,508 2 −2 410,234 1	−947,649 66 − 807,224 9	3 904,286 2 −7 915,791 1	992,450 76 −139,658 9	−974,914 2 634,187	$1{,}765\ 7\cdot10^{-2}$ $-4{,}879\cdot10^{-2}$
6	909,309 3 1 488,698 8	2 069,430 1 −2 555,937 6	−1 165,070 4 −2 124,376 8	5 384,556 −83 710,979 1	898,529 2 −288,138 8	−1 509,667 7 2 851,590 2	$2{,}668\cdot10^{-2}$ $-5{,}575\ 8\cdot10^{-2}$

9. Определим средние квадратические ошибки определения параметров

$$m''\psi_x = \rho''\mu\sqrt{q_{11}} = 264'';$$
$$m''\psi_y = \rho''\mu\sqrt{q_{22}} = 396'';$$
$$m''\psi_z = \rho''\mu\sqrt{q_{33}} = 77'';$$
$$m_a = \mu a\sqrt{q_{44}} = 494 \text{ м};$$
$$m_e = \mu\sqrt{q_{55}} = 0{,}000\,025;$$
$$m''(\psi_z + M_0) = \rho''\mu\sqrt{q_{66}} = 391''.$$

Анализируя полученные результаты, необходимо отметить невысокую точность измерения снимков — ошибка единицы веса измерения координаты на снимке составила 0,02 мм.

Элементы обратной матрицы $\mathbf{B}^{-1}$ нормальных уравнений коррелируют слабо (практически не коррелируют большая полуось и эксцентриситет). Как и следовало ожидать, точность определения элементов орбит по шести измеренным точкам на двух снимках невысокая. Повышения точности определения элементов орбиты можно добиться увеличением числа обрабатываемых снимков и исходных пунктов на них, а также за счет повышения точности самих измерений.

Так, при числе снимков $n=10$, на каждом из которых имелось по 3 исходных пункта, и $\mu=0{,}005$ мм ошибки угловых элементов орбиты не превосходят нескольких секунд, а большой полуоси — 30—40 м.

§ 33. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРИЕНТАЦИИ БАЗИСОВ КОСМИЧЕСКОЙ СЪЕМКИ

Условие компланарности. Пусть в моменты времени t_i и t_k получены топографические снимки i и k, выполненные с перекрытием (рис. 24). В области перекрытия на каждом из снимков идентифицировано положение точки j поверхности планеты. Условие компланарности базиса фотографирования $\bar{b}^0_{ik}$ и спутникоцентрических направлений $\bar{r}^0_{ij}$ и $\bar{r}^0_{kj}$ состоит в равенстве смешанного векторного произведения единичных векторов $\bar{b}^0_{ik}$, $\bar{r}^0_{ij}$ и $\bar{r}^0_{kj}$ нулю, т. е.

$$F_j = \bar{b}^0_{ik}[\bar{r}^0_{ij} \times \bar{r}^0_{kj}] = 0. \tag{470}$$

В координатной форме выражение (470) представим в виде определителя третьего порядка:

$$F_j = \begin{bmatrix} l_{ik} & m_{ik} & n_{ik} \\ l_{ij} & m_{ij} & n_{ij} \\ l_{kj} & m_{kj} & n_{kj} \end{bmatrix} = 0. \tag{471}$$

Разложим определитель F_j по элементам первой строки. Получим

$$F_j = l_{ik}A_j + m_{ik}B_j + n_{ik}C_j = 0, \tag{472}$$

где A_j, B_j, C_j — коэффициенты уравнения плоскости ijk, т. е. направляющие косинусы нормали N^0_{ikj} к плоскости ikj. Таким образом,

$$A_j = m_{ij}n_{kj} - m_{kj}n_{ij};\ B = n_{ij}l_{kj} - n_{kj}l_{ij};\ C_j = l_{ij}m_{kj} - l_{kj}m_{ij}. \tag{473}$$

В инерциальной системе координат векторы $\bar{r}^0_{ij}$ и $\bar{r}_{kj}$ вычисляются по формулам:

$$\bar{r}^0_{ij} = \Delta_{ij}\,\Pi_i^*\,\Pi_0 \begin{pmatrix} \tilde{x}_{ij} \\ \tilde{y}_{ij} \\ -f_t \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} l_{ij} \\ m_{ij} \\ n_{ij} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{ij}\cos\delta_{ij} \\ \sin\alpha_{ij}\cos\delta_{ij} \\ \sin\delta_{ij} \end{bmatrix};$$

$$\bar{r}^0_{kj} = \Delta_{kj}\,\Pi_j^*\,\Pi_0 \begin{pmatrix} \tilde{x}_{kj} \\ \tilde{y}_{kj} \\ -f_t \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} l_{kj} \\ m_{kj} \\ n_{kj} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{kj}\cos\delta_{kj} \\ \sin\alpha_{kj}\cos\delta_{kj} \\ \sin\delta_{kj} \end{bmatrix}. \qquad (474)$$

Уравнения компланарности значительно сложнее уравнений коллинеарности, поскольку в них входят элементы внешнего ориентирования снимков (Π_j^*, Π_k^*) и элементы взаимного ориентирования топографической и звездной камер (Π_0).

Нарушение условия компланарности в инерциальной системе координат. Вследствие суточного вращения Земли условие компланарности в инерциальной системе координат не выполняется. Поскольку Земля в инерциальной системе координат вращается, то за интервал времени $\delta t_{ik} = t_k - t_i$ точка j переместится по своей суточной параллели $P_j'P_j$ и в момент времени t_k займет в инерциальном пространстве положение j' (рис. 25). Для моментов времени t_i и t_k по формулам (474) можно определить спутникоцентрические направления $\bar{r}^0_{ij}$ и $\bar{r}^0_{kj}$, соответственно, которые скрещиваются. Следовательно, условие компланарности в инерциальной системе координат нарушено. Угол $\delta\beta$, на который перемещается точка j за интервал $\delta t^{(s)}_{ik}$ всемирного времени UT 1, вычисляют по формуле

$$\delta\beta = 15{,}041\,067\,\delta t^{(s)}_{ik}. \qquad (475)$$

Определим модуль и направление вектора δr_j перемещения точки j, обусловленного суточным вращением Земли.

Представим геоцентрические координаты вектора δr_j

$$\begin{aligned} \delta x_j &= r_j \cos(\alpha_j + \\ &+ \delta\beta)\cos\delta_j - \\ &- r_j \cos\alpha_j \cos\delta_j; \\ \delta y_j &= r_j \sin(\alpha_j + \delta\beta)\cos\delta_j - \\ &- r_j \sin\alpha_j \cos\delta_j; \\ \delta z_j &= 0. \end{aligned} \qquad (476)$$

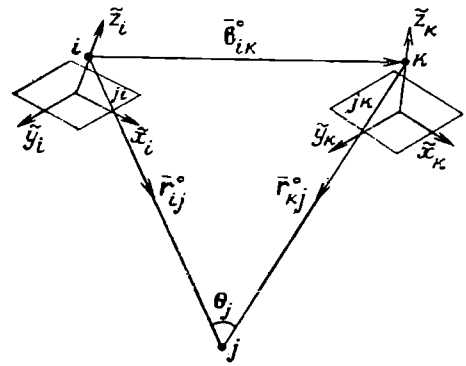

Рис. 24. Спутникоцентрические направления и базис фотографирования

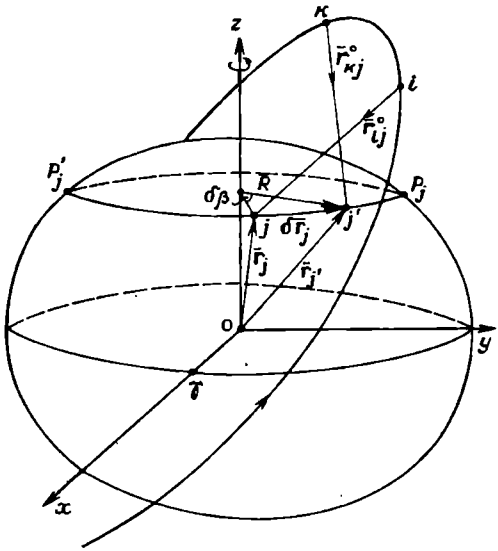

Рис. 25. Спутникоцентрические направления в инерциальной системе координат

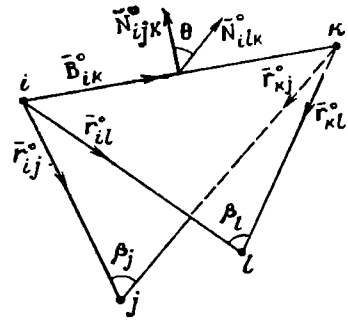

Рис. 26. Базис фотографирования

Поскольку интервал $\delta t^{(s)}$ при космическом фотографировании примерно равен 10^s, т. е. $7{,}27\cdot10^{-4}$ рад, то при разложении уравнений (476) в ряды Тейлора ограничимся линейными членами. При этом ошибки определения координат не превышают 10^{-7}, т. е. геоцентрическими координатами вектора $\delta\bar{r}_j$ будут следующие:

$$\begin{aligned}\delta x_j &= y_j\delta\beta = 7{,}792\cdot10^{-5}\,\delta t^{(s)}\,y_j;\\ \delta y_j &= -x_j\delta\beta = 7{,}792\cdot10^{-5}\,\delta t^{(s)}\,x_j;\\ \delta z_j &= 0.\end{aligned} \qquad (477)$$

Модуль $\delta\bar{r}_j$ определяется выражением

$$|\delta\bar{r}_j| = 7{,}292\cdot10^{-5}\,\delta t^{(s)}\sqrt{x_j^2+y_j^2}. \qquad (478)$$

Максимального значения $\delta\bar{r}_j$ достигает на экваторе, т. е. $|\delta\bar{r}|_{\max} = a_e 7{,}292\cdot10^{-5}\,\delta t^{(s)} \approx 4651$ м.

Таким образом, вследствие влияния суточного вращения Земли условие компланарности для спутникоцентрических направлений и базиса фотографирования следует рассматривать в гринвичской системе координат.

Условие компланарности в гринвичской системе координат. Выразим $\bar{R}^0_{ij}$ и $\bar{R}^0_{kl}$ в гринвичской системе координат. Получим

$$\bar{R}^0_{ij} = \Delta_{ij}S_j\Pi^*_j\Pi_0 = \begin{bmatrix} L_{ij}\\ M_{ij}\\ N_{ij}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(\alpha_{ij}-S_j)\cos\delta_{ij}\\ \sin(\alpha_{ij}-S_j)\cos\delta_{ij}\\ \sin\delta_{ij}\end{bmatrix}; \qquad (479)$$

$$\bar{\mathbf{R}}^0_{kj} = \Delta_{kj}\mathbf{S}_k\Pi^*\Pi = \begin{bmatrix} L_{kj} \\ M_{kj} \\ N_{kj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_{kj} - S_j)\cos\delta_{kj} \\ (\sin(\alpha_{kj} - S_j)\cos\delta_{kj} \\ \sin\delta_{kj} \end{bmatrix}. \quad (480)$$

Направление базиса фотографирования $\bar{\mathbf{B}}^0_{ik}$ определяется ориентирующими углами Φ_{ik} и Λ_{ik}:

$$\bar{\mathbf{B}}^0_{ik} = \begin{bmatrix} L_{ik} \\ M_{ik} \\ N_{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Phi_{ik}\cos\Lambda_{ik} \\ \cos\Phi_{ik}\sin\Lambda_{ik} \\ \sin\Phi_{ik} \end{bmatrix}. \quad (481)$$

С учетом выражений (479)—(481) условие компланарности в гринвичской системе координат запишем в следующем виде:

$$\mathbf{F}_j = \begin{bmatrix} L_{ik} & M_{ik} & N_{ik} \\ L_{ij} & M_{ij} & N_{ij} \\ L_{kj} & M_{kj} & N_{kj} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\Phi_{ik}\cos\Lambda_{ik} & \cos\Phi_{ik}\sin\Lambda_{ik} & \sin\Phi_{ik} \\ \cos(\alpha_{ij} - S_i)\cos\delta_{ij} & \sin\alpha_{ij} - S_j\cos\delta_{ij} & \sin\Phi_{ik} \\ \cos(\alpha_{kj} - S_k)\cos\delta_{ik} & \sin(\alpha_{ij} - S_k)\cos\delta_{ik} & \sin\delta_{ik} \end{bmatrix}. \quad (482)$$

Предварительное определение направления базиса фотографирования по двум точкам в пределах перекрытия снимков. Задача Вяйсяля. В пределах перекрытия смежных снимков идентифицированы две точки j и l (рис. 26), спутникоцентрические направления которых известны:

$$\bar{\mathbf{R}}^0_{ij} = \Delta_{ij}\mathbf{S}_i\Pi^*_i\Pi_0\begin{bmatrix} \tilde{x}_{ij} \\ \tilde{y}_{ij} \\ -f_t \end{bmatrix}_i; \quad \bar{\mathbf{R}}^0_{kj} = \Delta_{kj}\mathbf{S}_k\Pi^*_k\Pi_0\begin{bmatrix} \tilde{x}_{kj} \\ \tilde{y}_{kj} \\ -f_t \end{bmatrix}_k; \quad (483)$$

$$\bar{\mathbf{R}}^0_{il} = \Delta_{il}\mathbf{S}_i\Pi^*_i\Pi_0\begin{bmatrix} \tilde{x}_{ij} \\ \tilde{y}_{ij} \\ -f_t \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{R}}^0_{kl} = \Delta_{kl}\mathbf{S}_k\Pi^*_k\Pi_0\begin{bmatrix} \tilde{x}_{ki} \\ \tilde{y}_{kl} \\ -f_t \end{bmatrix}_k. \quad (484)$$

Тогда в соответствии с формулами (32)—(48) направления нормалей к плоскостям ijk и ilk получим в виде векторных произведений исходных направлений:

$$\bar{\mathbf{N}}^0_{ijk} = \frac{1}{\sin\beta_j}\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}}_x & \bar{\mathbf{e}}_y & \bar{\mathbf{e}}_z \\ L_{ij} & M_{ij} & N_{ij} \\ L_{kj} & M_{kj} & N_{kj} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{N}^0_{ilk} = \frac{1}{\sin\beta_l}\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}}_x & \bar{\mathbf{e}}_y & \bar{\mathbf{e}}_z \\ L_{il} & M_{il} & \Lambda \\ L_{kl} & M_{kl} & N_{kl} \end{bmatrix}. \quad (485)$$

где $\sin\beta_j = \sqrt{(M_{ij}N_{kj} - M_{kj}N_{ij})^2 + (L_{kj}N_{ij} - L_{ij}N_{kj})^2 + (L_{ij}M_{kj} - L_{kj}M_{ij})^2}$;

(486)

$$\sin\beta_l = \sqrt{(M_{il}N_{kl} - M_{kl}N_{kl})^2 + (L_{kl}N_{il} - L_{ij}N_{kl})^2 + (L_{il}M_{kj} - L_{kl}N_{kl})^2}.$$

(487)

Базис фотографирования $\bar{\mathbf{B}}^0_{ik}$ представим в виде векторного произведения нормалей к плоскостям, а именно, векторного произведения векторных произведений исходных векторов, задающих плоскости *ilk* и *ijk*, т. е.

$$\bar{\mathbf{B}}^0_{ik} = \frac{1}{\sin\theta}\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}}_x & \bar{\mathbf{e}}_y & \bar{\mathbf{e}}_z \\ L_{ilk} & M_{ilk} & N_{ilk} \\ L_{ijk} & M_{ijk} & N_{ijk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ik} \\ M_{ik} \\ N_{ik} \end{bmatrix}, \tag{488}$$

где $\sin\theta = \sqrt{(M_{ijk}N_{ilk} - M_{ilk}N_{ijk})^2 + (L_{ilk}N_{ijk} - L_{ijk}N_{ilk})^2 + \rightarrow}$

$$\rightarrow + \sqrt{(L_{ijk}M_{ilk} - L_{ilk}M_{ijk})^2}. \tag{489}$$

Ориентирующие углы Λ_{ik} и Φ_{ik} базиса съемки получим по формулам

$$\operatorname{tg}\Lambda_{ik} = \frac{M_{ik}}{L_{ik}}; \quad \operatorname{tg}\Phi_{ik} = \frac{N_{ik}}{\sqrt{M^2_{ik} + L^2_{ik}}}. \tag{490}$$

Пример 18. На двух смежных снимках, выполненных в моменты времени $t_l = 4{,}511\,7527^h \cdot 10^{-1}$ и $t_k = 4{,}613\,4193^h \cdot 10^{-1}$, в системе UT1 идентифицированы две точки, координаты которых измерены в системах координат снимков (табл. 22).

Фокусное расстояние камеры $f = 100{,}0123$ мм, известно звездное время в Гринвиче в моменты фотографирования

$S_l = 4{,}600\,635^h$, $S_k = 4{,}604\,813^h$.

Операторы ориентации топографических снимков в инерциальном простран-

Таблица 22

Точка	$\tilde{x}$	$\tilde{y}$
	момент t_l	
i	50,4364	—128,0851
l	28,4482	—111,8826
	момент t_k	
j	99,7905	—126,5512
l	70,4745	—109,6730

ствe в моменты t_i и t_k были следующими:

$$\Pi_i^{\mathrm{T}} = (\Pi_i^* \Pi_0^{\mathrm{T}}) = \begin{bmatrix} 3{,}429\ 0738 \cdot 10^{-1} & 7{,}143\ 9168 \cdot 10^{-1} & 6{,}099\ 6655 \cdot 10^{-1} \\ -8{,}315\ 1556 \cdot 10^{-1} & -7{,}125\ 683 \cdot 10^{-2} & 5{,}509\ 1239 \cdot 10^{-1} \\ 4{,}370\ 3146 \cdot 10^{-1} & -6{,}961\ 0853 \cdot 10^{-1} & 5{,}695\ 9324 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix};$$

$$\Pi_k^{\mathrm{T}} = (\Pi_k^* \Pi_0^{\mathrm{T}}) = \begin{bmatrix} 3{,}440\ 137 \cdot 10^{-1} & 7{,}124\ 5158 \cdot 10^{-1} & 6{,}116\ 1055 \cdot 10^{-1} \\ -8{,}303\ 2577 \cdot 10^{-1} & -7.331\ 269 \cdot 10^{-2} & 5{,}524\ 3509 \cdot 10^{-1} \\ 4{,}384\ 22 \cdot 10^{-1} & -6{,}978\ 8119 \cdot 10^{-1} & 5{,}663\ 4647 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix}.$$

Определить ориентирующие углы Φ_{ik} и Λ_{ik} базиса фотографирования $\overline{\mathrm{B}}^0_{ik}$ в гринвичской системе координат.

Решение.

1. Определим единичные векторы направлений в системах координат снимков:

$$\overline{\mathrm{r}}^0_{ij} = \begin{bmatrix} 2{,}964\ 1827 \cdot 10^{-1} \\ -7{,}527{,}6365 \cdot 10^{-1} \\ -5{,}877\ 7816 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix}; \quad \overline{\mathrm{r}}^0_{il} = \begin{bmatrix} 1{,}862\ 5258 \cdot 10^{-1} \\ -7{,}325\ 0412 \cdot 10^{-1} \\ -6{,}547\ 8834 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix};$$

$$\overline{\mathrm{r}}^0_{kj} = \begin{bmatrix} 5{,}261\ 1891 \cdot 10^{-1} \\ -6{,}672\ 0759 \cdot 10^{-1} \\ -5{,}272\ 8829 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix}; \quad \overline{\mathrm{r}}^0_{kl} = \begin{bmatrix} 4{,}289\ 1575 \cdot 10^{-1} \\ -6{,}674\ 8224 \cdot 10^{-1} \\ -6{,}086\ 8613 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix}.$$

2. Единичные векторы направлений в инерциальной системе координат будут следующими:

$$\overline{\mathrm{r}}^0_{ij} = \begin{bmatrix} 4{,}707\ 0115 \cdot 10^{-1} \\ 6{,}745\ 5569 \cdot 10^{-1} \\ -5{,}686\ 9606 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix}; \quad \overline{\mathrm{r}}^0_{il} = \begin{bmatrix} 3{,}867\ 9285 \cdot 10^{-1} \\ 6{,}410\ 5696 \cdot 10^{-1} \\ -6{,}629\ 0077 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix};$$

$$\overline{\mathrm{r}}^0_{kj} = \begin{bmatrix} 5{,}038\ 1698 \cdot 10^{-1} \\ 7{,}917\ 3356 \cdot 10^{-1} \\ -3{,}454\ 3677 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix}; \quad \overline{\mathrm{r}}^0_{kl} = \begin{bmatrix} 4{,}349\ 192 \cdot 10^{-1} \\ 7{,}793\ 0717 \cdot 10^{-1} \\ -4.511\ 3833 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix},$$

3. Вычислим спутникоцентрические прямые восхождения и склонения:

$\alpha_{ij} = 55{,}092\ 879°$; $\alpha_{il} = 58{,}894\ 589°$; $\alpha_{kj} = 57\ 529\ 499°$; $\alpha_{kl} = 60{,}834\ 792°$;

$\delta_{ij} = -34{,}659\ 345°$; $\delta_{il} = -41{,}521\ 476°$; $\delta_{kj} = -20{,}208\ 458°$; $\delta_{kl} = -28{,}816\ 738°$;

$\alpha_{ij} - S_i = -13{,}916\ 646°$; $\alpha_{il} - S_i = -10{,}114\ 936°$; $\alpha_{kj} - S_k = -11{,}542\ 696°$;

$\delta_{kj} - S_k = -8{,}237\ 403°$.

4. Получим направляющие косинусы единичных векторов в гринвичской системе координат (табл. 23).

5. Определим направляющие косинусы нормалей $\overline{\mathrm{N}}^0_{ilk}$ и $\overline{\mathrm{N}}^0_{ijk}$ к плоскостям (табл. 24).

Вычислим углы между направлениями $\overline{\mathrm{N}}^0_{ilk}$ и $\overline{\mathrm{N}}^0_{ijk}$ и плоскостями. Они составят соответственно $\beta_1 = 14{,}785\ 86°$ и $\beta_2 = 14{,}600\ 916°$.

Таблица 23

Направляющий косинус	$\overline{R}^0_{ij}$	$\overline{R}^0_{il}$
L	$7{,}984\ 032\ 7\cdot10^{-1}$	$7{,}370\ 705\ 3\cdot10^{-1}$
M	$-1{,}978\ 310\ 1\cdot10^{-1}$	$-1{,}314\ 905\cdot10^{-1}$
N	$-5{,}686\ 96\cdot10^{-1}$	$-6{,}629\ 007\ 7\cdot10^{-1}$
Направляющий косинус	$\overline{R}^0_{kj}$	$\overline{R}^0_{kl}$
L	$9{,}194\ 629\cdot10^{-1}$	$8{,}832\ 465\ 7\cdot10^{-1}$
M	$-1{,}877\ 804\ 6\cdot10^{-1}$	$-1{,}278\ 663\ 9\cdot10^{-1}$
N	$-3{,}454\ 367\ 3\cdot10^{-1}$	$-4{,}511\ 382\ 7\cdot10^{-1}$

Таблица 24

Направляющий косинус	$\overline{N}^0_{ilk}$	$\overline{N}^0_{ijk}$
L	$-9{,}969\ 457\ 3\cdot10^{-2}$	$-1{,}525\ 143\ 7\cdot10^{-1}$
M	$-9{,}913\ 132\ 9\cdot10^{-1}$	$-9{,}801\ 284\ 3\cdot10^{-1}$
N	$8{,}578\ 470\ 8\cdot10^{-2}$	$1{,}268\ 372\ 2\cdot10^{-1}$

6. Найдем базис фотографирования:

$$\overline{B}^0_{lk}=\frac{1}{\sin\theta}\,[\overline{N}^0_{ilk}\times\overline{N}^0_{ijk}]=\begin{matrix}L_{lk}\\M_{lk}\\N_{lk}\end{matrix}\begin{bmatrix}-6{,}145\,059\cdot10^{-1}\\-6{,}467\,6159\cdot10^{-3}\\-7{,}888\,8571\cdot10^{-1}\end{bmatrix}$$

и углы $\Theta=3{,}886\ 8784°$; $\Lambda_{lk}=-179{,}396\ 99°$; $\Phi_{lk}=-52{,}081\ 499°$.

В данном примере угол Θ между нормалями весьма мал, поэтому точность предварительиого определения иаправления базиса низкая. Истинные значения ориентирующих углов в данном примере $\Delta^{ист}_{lk}=-179{,}394\ 72°$; $\Phi^{ист}_{lk}=-52{,}092\ 407°$. При этом истинные ошибки составляют: $\Delta\Lambda_{lk}=8{,}1''$; $\Delta\Phi_{lk}=39{,}2''$.

Однако оценка точности показывает, что при ошибке $\mu=10''$ в спутникоцентрическом направлении ошибка определения иаправления базиса будет во много раз больше.

Оценку точности определеиия направления базиса выполним с помощью формулы

$$m_{\overline{B}_0}=\frac{\mu}{\sin\theta}\,\frac{2r_m}{B}.$$

где r_m — среднее расстояиие от точек до ИСЗ, B — длина базиса. Если $r_m\approx$ $\approx$420 км; $B\approx$100 км; $\sin\Theta=6{,}78\cdot10^{-2}$; $\mu=10''$, тогда $m_{\overline{B}^0}=1239''$. Однако даже столь грубое приближеняе можно приияять в качестве начальиого при дальнейшем уточнении направления базиса по способу наименьших квадратов с использованием 20—30 точек в пределах перекрытия смежных снимков.

Низкая точность засечки в даином примере объясняется исходиыми даиными задачи Орбита данного ИСЗ имеет высоту перицентра $h_п \approx 420$ км, а базис съемки $B \approx 100$ км. В этих условиях углы β_l и β_k будут порядка 14°. Очевядно, что при определении иаправления базиса необходимо, чтобы отношение B/H было максимальным.

7. Уточним направление $\overline{\mathbf{B}}^0_{ik}$ по способу наименьших квадратов.

В перекрытии смежных снимков можно идентифицировать $j=1, 2, \ldots, N$ точек, а следовательно, появляется возможность уточнения направления базиса $\overline{\mathbf{B}}^0_{ik}$ по способу наименьших квадратов. При этом каждой точке в пределах перекрытия соответствует одно условное уравнение для определения поправок $\Delta\Phi_{ik}$ и $\Delta\Lambda_{ik}$ в ориентирующие углы.

Запишем условие комплаиарности (472) в гринвичской системе координат:

$$F_j = L_{ik}A_j + M_{ik}B_j + N_{ik}C_j, \tag{491}$$

После несложных преобразований с учетом (482) коэффициенты A_j, B_j и C_j вычислим по ориеитирующим углам спутникоцентрических направлений $\overline{\mathbf{R}}_{ij}{}^0$ и $\overline{\mathbf{R}}_{kj}{}^0$:

$$\begin{aligned} A_j &= \operatorname{tg}\delta_{kj}\sin(\alpha_{ij}-S_i) - \operatorname{tg}\delta_{ij}\sin(\alpha_{kj}-S_k);\\ B_j &= \operatorname{tg}\delta_{ij}\sin(\alpha_{kj}-S_k) - \operatorname{tg}\delta_{kj}\cos(\alpha_{ij}-S_i);\\ C_j &= \sin[(\alpha_{kj}-S_k)-(\alpha_{ij}-S_i)]. \end{aligned} \tag{492}$$

Частные производные от F_i по ориентирующим углам Λ_{ik} и Φ_{ik} базиса $\overline{\mathbf{B}}^0_{ik}$ в гринвичской системе координат получим путем дифферениирования выражения (491) с учетом формул (492):

$$\frac{\partial F_j}{\partial \Delta_{ik}} = a_j = -M_{ik}A_j + L_{ik}B_j; \quad \frac{\partial F_j}{\partial \Phi_{ik}} = b_j = \frac{C_j}{\cos\Phi_{ik}}. \tag{493}$$

Частные производные от F_j по величинам δ_{ij}; $(\alpha_{ij}-S_i)$; δ_{kj}; $(\alpha_{kj}-S_k)$, вычисленные в результате фотограмметрической обработки снимков, найдем аналогично. Соответствующие формулы имеют вид:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F_j}{\partial(\alpha_{ij}-S_i)} = a_1 = \operatorname{tg}\delta_{kj}[\cos(\alpha_{ij}-S_i)\,L_{ik} + \sin(\alpha_{ij}-S_i)\,M_{ik}] - N_{ik}\times\\ &\times\cos[(\alpha_{kj}-S_{kj}) - (\alpha_{ij}-S_i)];\\ &\frac{\partial F_j}{\partial\delta_{ij}} = b_1 = \frac{1}{\cos^2\delta_{ij}}[-\sin(\alpha_{kj}-S_k)\,L_{ik} + \cos(\alpha_{kj}-S_k)\,M_{ik}];\\ &\frac{\partial F_j}{\partial(\alpha_{kj}-S_k)} = a_2 = -\operatorname{tg}\delta_{ij}[\cos(\alpha_{kj}-S_k)\,L_{ik} + \sin(\alpha_{kj}-S_k)\,M_{ik}] +\\ &+ N_{ik}\cos[(\alpha_{kj}-S_k) - (\alpha_{ij}-S_i)];\\ &\frac{\partial F_j}{\partial\delta_{kj}} = b_2 = \frac{1}{\cos^2\delta_{kj}}[\sin(\alpha_{ij}-S_j)\,L_{ik} - \cos(\alpha_{ij}-S_j)\,M_{ik}]. \end{aligned} \tag{494}$$

Чтобы соблюсти равеиство масштабов по мерндианам и параллелям, введем в качестве неизвестных величины:

$$x = \cos\Phi_{ik}\Delta\Lambda_{ik}; \quad y = \Delta\Phi_{ik}. \tag{495}$$

Тогда для каждой точки j $(j=1, 2, \ldots, N)$ в пределах перекрытия снимков можно составять одио уравненяе поправок, а именно,

$$a_j x \sec\Phi_{ik} + b_j y = \varepsilon_j + v_j \tag{496}$$

с весом P_j $(j=1, 2, \ldots, N)$.

Коэффициенты a_j и b_j уравнения поправок (496) определим по приближенным значениям $\Phi_{ik}^{(0)}$ и $\Lambda_{ik}^{(0)}$, полученным с помощью метода, изложенного в п. 4 этого параграфа. Свободный член ε_j вычислям по результатам фотограмметрической обработки снимков a_{ij}—S_j, δ_{ij}, α_{kj}—S_k, δ_{kj} и приближенным значением

$\Phi_{ik}^{(0)}$ и $\Lambda_{ik}^{(0)}$.

На основании формулы (491) имеем

$$\varepsilon_j = -F_j^{(0)} = -(L_{ck}^0 A_j + M_{ik}^{(0)} B_j + N_{ik}^{(0)} C_j). \tag{497}$$

Поправка ϑ_j в условии компланарности — функция измеренных величин, поэтому

$$\vartheta_j = -[a_1\vartheta_{\alpha_{ij}-S_i} + b_1\vartheta_{\delta_{ij}} + a_2\vartheta_{\alpha_{kj}-S_k} + b_2\vartheta_{\delta_{kj}}]. \tag{498}$$

Вес P_j уравнения поправок (496) найдем по формуле

$$P_j = \frac{1}{m_{F_j}^2}. \tag{499}$$

Если предположить, что измеренные величины коррелируют слабо, то

$$m_F^2 = a_1^2 m_{\alpha_{ij}-S_j}^2 + b_1^2 m_{\delta_{ij}}^2 + a_2^2 m_{\alpha_{kj}-S_k}^2 + b_2^2 m_{\delta_{kj}}^2. \tag{500}$$

Система уравнений (496) решается по способу наименьших квадратов с использованием ньютоновскях итераций, пока для N-го приближения не выполнятся условия:

$$|x^N - x^{N-1}| \leqslant \Delta;$$

$$|y^N - y^{N-1}| \leqslant \Delta.$$

Обратную матрицу нормальных уравнений

$$\underset{(2,2)}{\mathbf{B}^{-1}} = \begin{bmatrix} q_{\Phi\Phi} & q_{\Phi\Lambda} \\ q_{\Phi\Lambda} & q_{\Lambda\Lambda} \end{bmatrix} \tag{501}$$

используем для оценки точности по формулам

$$m_{x\cos\Phi} = \mu\sqrt{q_{\Lambda\Lambda}}; \quad m_y = \mu\sqrt{q_{\Phi\Phi}}; \quad \mu = \sqrt{\frac{[\theta\theta]}{N-2}},$$

§ 34. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УТОЧНЕНИЕ ОРБИТЫ ПО ОРИЕНТИРУЮЩИМ УГЛАМ БАЗИСОВ ФОТОГРАФИРОВАНИЯ В ГРИНВИЧСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

В результате фотограмметрической обработки синхронных снимков планеты и звездных снимков (при наличии перекрытия) получают направления базисов съемки $\bar{\mathbf{B}}_{ik}^0$ в гринвичской системе координат.

Ориентирующие углы Λ_{ik} и Φ_{ik} базиса съемки связаны с гринвичскими геоцентрическими координатами ИСЗ в моменты фото-

графирования t_i и t_k формулами:

$$\operatorname{ctg}\Lambda_{ik}=\frac{X_k-X_i}{Y_k-Y_i};$$
$$\operatorname{tg}\Phi_{ik}=\frac{Z_k-Z_i}{\sqrt{(X_k-X_i)^2+(Y_k-Y_i)^2}}. \tag{502}$$

В результате линеаризации уравнений (502) получим следующие дифференциальные формулы:

$$\cos\Phi_{ik}\Delta\Lambda_{ik}=-\frac{\sin\Lambda_{ik}}{B_{ik}}(dX_k-dX_i)+\frac{\cos\Lambda_{ik}}{B_{ik}}(dY_k-dY_i);$$
$$\Delta\Phi_{ik}=-\frac{\sin\Phi_{ik}\cos\Lambda_{ik}}{B_{ik}}(dX_k-dX_i)-\frac{\sin\Phi_{ik}\sin\Lambda_{ik}}{B_{ik}}(dY_k- \tag{503}$$
$$-dY_i)+\frac{\cos\Phi_{ik}}{B_{ik}}(dZ_k-dZ_i).$$

Введем обозначения:

$$a_{ik}=-\frac{\sin\Lambda_{ik}}{B_{ik}};\quad b_{ik}=\frac{\cos\Lambda_{ik}}{B_{ik}};$$
$$a'_{ik}=-\frac{\sin\Phi_{ik}\cos\Lambda_{ik}}{B_{ik}};\quad b'_{.k}=-\frac{\sin\Phi_{ik}\sin\Lambda_{ik}}{B_{ik}}; \tag{504}$$
$$c'_{ik}=\frac{\cos\Phi_{ik}}{B_{ik}}.$$

Тогда формулы (503) преобразуем к виду:

$$\cos\Phi_{ik}\Delta\Lambda_{ik}=a_{ik}(dX_k-dX_i)+b_{ik}(dY_k-dY_i); \tag{505}$$
$$\Delta\Phi_{ik}=a'_{ik}(dX_k-dX_i)+b'_{ik}(dY_k-dY_i)+c'_{ik}(dZ_k-dZ_i).$$

Координаты ИСЗ в моменты съемки t_k и t_i являются функциями начальных условий движения, заданных в гринвичской системе координат, т. е.

$$X=X[X_0,\ Y_0,\ Z_0,\ \dot{X}_0,\ \dot{Y}_0,\ \dot{Z}_0];$$
$$Y=Y[X_0,\ Y_0,\ Z_0,\ \dot{X}_0,\ \dot{Y}_0,\ \dot{Z}_0]; \tag{506}$$
$$Z=Z[X_0,\ Y_0,\ Z_0\ \dot{X}_0,\ \dot{Y}_0,\ \dot{Z}_0].$$

Поэтому

$$dX = \frac{\partial X}{\partial(X_0,\ Y_0,\ Z_0,\ \dot{X}_0,\ \dot{Y}_0,\ \dot{Z}_0)} \begin{bmatrix} dX_0 \\ dY_0 \\ dZ_0 \\ d\dot{X}_0 \\ d\dot{Y}_0 \\ d\dot{Z}_0 \end{bmatrix};$$

$$dY = \frac{\partial Y}{\partial(X_0,\ Y_0,\ Z_0,\ \dot{X}_0,\ \dot{Y}_0,\ \dot{Z}_0)} \begin{bmatrix} dX_0 \\ dY_0 \\ dZ_0 \\ d\dot{X}_0 \\ d\dot{Y}_0 \\ d\dot{Z}_0 \end{bmatrix}. \qquad (507)$$

С учетом формул (507) дифференциальные формулы (505) представим в следующем виде:

$$\cos\Phi_{ik}\Delta\Lambda_{ik} = \left\{ a_{ik} \left[\frac{\partial X_k}{\partial(X_0,\ Y_0,\ Z_0,\ \dot{X}_0,\ \dot{Y}_0,\ \dot{Z}_0)} - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{\partial X_i}{\partial(X_0,\ Y_0,\ Z_0,\ \dot{X}_0,\ \dot{Y}_0,\ \dot{Z}_0)} \right] + b_{ik} \left[\frac{\partial Y_k}{\partial(X_0,\ Y_0,\ Z_0,\ \dot{X}_0,\ \dot{Y}_0,\ \dot{Z}_0)} - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial Y_i}{\partial(X_0,\ Y_0,\ Z_0,\ \dot{X}_0,\ \dot{Y}_0,\ \dot{Z}_0)} \right] \right\} \begin{bmatrix} dX_0 \\ dY_0 \\ dZ_0 \\ d\dot{X}_0 \\ d\dot{Y}_0 \\ d\dot{Z}_0 \end{bmatrix}; \qquad (508)$$

$$\Delta\Phi_{ik} = \left\{ a'_{ik} \left| \frac{\partial X_k}{\partial(X_0,\ Y_0,\ Z_0,\ \dot{X}_0,\ \dot{Y}_0,\ \dot{Z}_0)} - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{\partial X_i}{\partial(X_0,\ Y_0,\ Z_0,\ \dot{X}_0,\ \dot{Y}_0,\ \dot{Z}_0)} \right] + b'_{ik} \left[\frac{\partial Y_k}{\partial(X_0,\ Y_0,\ Z_0,\ \dot{X}_0,\ \dot{Y}_0,\ \dot{Z}_0)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial Y_i}{\partial(X_0,\ Y_0,\ Z_0,\ \dot{X}_0,\ \dot{Y}_0,\ \dot{Z}_0)} + c'_{ik} \left[\frac{\partial Z_k}{\partial(X_0,\ Y_0,\ Z_0,\ \dot{X}_0,\ \dot{Y}_0,\ \dot{Z}_0)} - \right.\right.$$

$$-\frac{\partial Z_t}{\partial(X_0,\ Y_0,\ Z_0,\ \dot{X}_0,\ \dot{Y}_0,\ \dot{Z}_0)}\Bigg|\begin{bmatrix} dX_0 \\ dY_0 \\ dZ_0 \\ d\dot{X}_0 \\ d\dot{Y}_0 \\ d\dot{Z}_0 \end{bmatrix}. \tag{509}$$

Уравнения (508) и (509) являются исходными при дифференциальном уточнении орбит по ориентирующим углам базисов космической съемки.

Для сокращения записи введем обозначения для матриц-строчек размера 1×6, входящих в уравнения (508) и (509):

$$\underset{(1,6)}{J_x} = \frac{\partial X}{\partial(X_0,\ Y_0,\ Z_0,\ \dot{X}_0,\ \dot{Y}_0,\ \dot{Z}_0)};$$

$$\underset{(1,6)}{J_y} = \frac{\partial Y}{\partial(X_0,\ Y_0,\ Z_0,\ \dot{X}_0,\ \dot{Y}_0,\ \dot{Z}_0)}; \tag{510}$$

$$\underset{(1,6)}{J_z} = \frac{\partial Z}{\partial(X_0,\ Y_0,\ Z_0,\ \dot{X}_0,\ \dot{Y}_0,\ \dot{Z}_0)};$$

$$\cos\Phi_{ik}\Delta\Lambda_{ik} = \left[a_{ik}\left(\underset{(1,6)}{J_{xk}} - \underset{(1,6)}{J_{xi}}\right) + b_{ik}\left(\underset{(1,6)}{J_{yk}} - J_{yi}\right)\right]\begin{bmatrix} dX_0 \\ dY_0 \\ dZ_0 \\ d\dot{X}_0 \\ d\dot{Y}_0 \\ d\dot{Z}_0 \end{bmatrix}; \tag{511}$$

$$\Delta\Phi_{ik} = \left[a'_{ik}\left(\underset{(1,6)}{J_{xk}} - \underset{(1,6)}{J_{xi}}\right) + b'_{ik}\left(\underset{(1,6)}{J_{yk}} - \underset{(1,6)}{J_{yi}}\right) + c'\left(\underset{(1,6)}{J_{zk}} - \underset{(1,6)}{J_{zi}}\right)\right]\begin{bmatrix} dX_0 \\ dY_0 \\ dZ_0 \\ d\dot{X}_0 \\ d\dot{Y}_0 \\ d\dot{Z}_0 \end{bmatrix}. \tag{512}$$

Обозначим вектор начальных условий через $\bar{\mathbf{X}}_0$:

$$\underset{(6,1)}{\bar{\mathbf{X}}_0} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \\ \dot{X}_0 \\ \dot{Y}_0 \\ \dot{Z}_0 \end{bmatrix}, \tag{513}$$

тогда каждый базис $\bar{\mathbf{B}}^0_{ik}$ будет определять два уравнения поправок:

$$[a_{ik}\underset{(1,6)}{(J_{xk}-J_{xi})} + b_{ik}\underset{(1,6)}{(J_{yk}-J_{yi})}]\,d\bar{\mathbf{X}}_0 = \vartheta_{ik} + \varepsilon_{ik}; \tag{514}$$

$$[a'_{ik}\underset{(1,6)}{(J_{xk}-J_{xi})} + b'_{ik}\underset{(1,6)}{(J_{yk}-J_{yi})} + c'_{ik}\underset{(1,6)}{(J_{zk}-J_{zi})}\,d\,\bar{\mathbf{X}}_0 = \vartheta'_{ik} + \varepsilon'_{ik} \tag{515}$$

с весовой матрицей

$$\underset{(2,2)}{\mathbf{P}} = \underset{(2,2)}{\mathbf{K}^{-1}_{ik}} = \begin{bmatrix} q_{\Delta\Delta} & q_{\Phi\Delta} \\ q_{\Phi\Delta} & q_{\Phi\Phi} \end{bmatrix}^{-1}. \tag{516}$$

Таким образом, весовая матрица $\mathbf{P}_{ik}$ совпадает с матрицей $\mathbf{B}_{(2.2)}$ нормальных уравнений, которую составляют при определении ориентирующих углов базиса по формуле (501). Свободные члены уравнений поправок (514) и (515) вычисляем по формулам:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ik} &= \cos\Phi^{00}_{ik}(\Lambda^0_{ik} - \Lambda^{00}_{ik}); \\ \varepsilon'_{ik} &= \Phi^0_{ik} - \Phi^{00}_{ik}, \end{aligned} \tag{517}$$

где величины Φ^{00}_{ik}, Λ^{00}_{ik} получены путем *точного интегрирования дифференциальных уравнений движения* на моменты фотографирования t_i и t_k. В качестве начальных условий приняты приближенные значения $X_0{}^0$, $Y_0{}^0$, $Z_0{}^0$, $\dot{X}_0{}^0$, $\dot{Y}_0{}^0$, $\dot{Z}_0{}^0$, а Φ^0_{ik} и Λ^0_{ik}, определенные в результате фотограмметрической обработки снимков; ϑ_{ik} и ϑ'_{ik} — поправки в ориентирующие углы.

Объединив все $j=1, 2, \ldots, N$ точек в пределах перекрытия n снимков, включенных в обработку, получим матрицу уравнений поправок

$$\underset{(2N,6)}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} [a_{ik}(J_{xk}-J_{xi}) + b_{ik}(J_{yk}-J_{yi})]_1 \\ [a'_{ik}(J_{xk}-J_{xi}) + b'_{ik}(J_{yk}-J_{yi}) + c'_{ik}(J_{zk}-J_{zi})]_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ [a_{ik}(J_{xk}-J_{xi}) + b_{ik}(J_{yk}-J_{yi})]_N \\ [a'_{ik}(J_{xk}-J_{xi}) + b'_{ik}(J_{yk}-J_{yi}) + c'_{ik}(J_{zk}-J_{zi})]_N \end{bmatrix} \tag{518}$$

и диагональную весовую матрицу $\mathbf{P}$

$$\underset{(2N,6)}{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \left[\begin{matrix} q_{\Delta\Delta} & q_{\Phi\Delta} \\ q_{\Phi\Delta} & q_{\Phi\Phi} \end{matrix}\right]^{-1}_{(2,2)_1} & 0 & 0\ 0\ 0 & 0 \\ 0 & \left[\begin{matrix} q_{\Delta\Delta} & q_{\Phi\Delta} \\ q_{\Phi\Delta} & q_{\Phi\Phi} \end{matrix}\right]^{-1}_{(2,2)_2} & 0\ 0\ 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0\ 0\ 0 & \left[\begin{matrix} q_{\Delta\Delta} & q_{\Phi\Delta} \\ q_{\Phi\Delta} & q_{\Phi\Phi} \end{matrix}\right]^{-1}_{(2,2)_N} \end{bmatrix}. \quad (519)$$

Решение по способу наименьших квадратов осуществим следующим образом:

$$\underset{(6,1)}{d\overline{X}^0_{k+1}} = \begin{bmatrix} \Delta X_0 \\ \angle Y_0 \\ \Delta Z_0 \\ \Delta \dot{X}_0 \\ \Delta \dot{Y}_0 \\ \Delta \dot{Z}_0 \end{bmatrix} = (\underset{(6,2N)}{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}}\ \underset{(2N,6)}{\mathbf{P}}\ \underset{(2N,6)}{\mathbf{A}})^{-1}_{k+1}\ \underset{(6,2N)}{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}_{k+1}}\ \underset{(2N,1)}{\bar{\varepsilon}_{k+1}} = \underset{(6,6)}{\mathbf{N}^{-1}_{k+1}}\ \underset{(2N,1)}{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}_{k+1}}\ \underset{(2N,1)}{\bar{\varepsilon}_{k+1}}, \quad (520)$$

где $\underset{(2N,1)}{\bar{\varepsilon}}$ — вектор свободных членов, k — номер ньютоновской итерации. После окончания итераций определим тензор ошибок начальных условий:

$$\underset{(6,6)}{\mathbf{K}^2_{\bar{X}_0}} = \mu^2 \underset{(6,6)}{\mathbf{N}^{-1}}, \quad (521)$$

где μ — ошибка единицы веса уравненных величин.

§ 35. ТОЧНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОРБИТ ПО ОРИЕНТИРУЮЩИМ УГЛАМ БАЗИСОВ КОСМИЧЕСКОЙ СЪЕМКИ

Положим, что движение картографического ИСЗ происходит по круговой полярной орбите с большой полуосью $a=6\,728\,000$ м при высоте полета $h=350$ км. Кроме того, не нарушая общности выводов, положим, что линия узлов совпадает с линией, соединяющей равноденственные точки, а вращение планеты отсутствует.

Допустим также, что углы Ф и Λ не коррелированы, т. е.

$$m_{\Phi} = m_{\Lambda} \cos \Phi = \frac{m_{\overline{B}^0}}{\sqrt{2}},$$

где $m_{\overline{B}^0}$ — средняя квадратическая ошибка направления базиса.

Таким образом, для принятой модели имеем: $a=6650$ км; $e=0$; $J=90°$; $\Omega=0°$; $\omega=0°$. Положим, что в начальную эпоху t_0 средняя аномалия $M_0=0$, длина базиса $B=200$ км, интервал между моментами съемки $\Delta t=26^s$.

Запишем числовые характеристики принятой модели:

$$M_0=0;\ \sin J=1;\ \cos J=0;\ \sin \omega=0;$$

$$\cos \omega=1;\ \sin \Omega=0;\ \cos \Omega=0;\ \sin M_0=0;$$

$$\cos M_0=0;\ n=\frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}=6{,}555\cdot 10^{-2}\ °/\text{с};$$

$$\frac{B}{2a}=1{,}486\cdot 10^{-2};\quad n\Delta t \approx \Delta M \approx \sin \Delta M \approx 2{,}974\cdot 10^{-2}; \tag{522}$$

$$V=\sqrt{\frac{\mu}{a}}=7\,697\ \text{м/с};\quad \frac{3}{2}n\Delta t=4{,}460\cdot 10^{-2};$$

$$B=V\Delta t \approx 200\ \text{км}.$$

Дифференцируя формулы ориентирующих углов с учетом начальных условий, получим:

$$\begin{aligned} d\Lambda_{12} &= \frac{1}{B_{12}\cos \Phi_{12}}(dy_1-dy_2);\\ d\Phi_{12} &= \frac{\sin \Phi_{12}}{B_{12}}(dx_1-dx_2)-\frac{\cos \Phi_{12}}{B_{12}}(dz_1-dz_2). \end{aligned} \tag{523}$$

Выразим ориентирующие углы Ф через геоцентрические склонения δ ИСЗ. Для принятой модели

$$x=a\cos \delta;\ y=0;\ z=a\sin \delta, \tag{524}$$

поэтому

$$\begin{aligned} \sin \Phi_{12} &= -\cos \frac{\delta_1+\delta_2}{2} = -\cos \delta_m;\\ \cos \Phi_{12} &= \sin \delta_m. \end{aligned} \tag{525}$$

Тогда формулы (523) получим в виде:

$$\begin{aligned} d\Lambda_{12} &= \frac{1}{B\sin \delta_m}(dy_1-dy_2);\\ d\Phi_{12} &= -\frac{\cos \delta_m}{B}(dx_1-dx_2)-\frac{\sin \delta_m}{B}(dz_1-dz_2). \end{aligned} \tag{526}$$

Если продифференцировать формулы, связывающие прямоугольные инерциальные координаты ИСЗ с элементами орбиты и вычислить производные с учетом характеристик модели (522), то после ряда преобразований получим дифференциальные формулы ориентирующих углов как функций элементов орбиты. Они будут следующими:

$$
\begin{aligned}
&d\Lambda_{12} = -d\Omega - \operatorname{ctg}\delta_m dJ;\\
&d\Phi_{12} = -\frac{\cos\delta_m}{B}\left\{\left[(x_1 - x_2) + \frac{3}{2}V(t_1\sin M_1 - t_2\sin M_2)\right]\frac{da}{a} - \right.\\
&-(z_1 - z_2)dM_0\Big\} - \frac{\sin\delta_m}{B}\left\{\left[(z_1 - z_2) - \right.\right.\\
&\left.\left.-\frac{3}{2}V(t_1\cos M_1 - t_2\cos M_2)\right]\frac{da}{a} + (x_1 - x_2)dM_0\right\}.
\end{aligned}
\tag{527}
$$

Из формул (527) следует, что неизвестные можно разбить на две группы. Внешние элементы орбиты — долгота восходящего узла Ω и наклонение к плоскости экватора J — определяются по ориентирующим углам Λ, а внутренние элементы — большая полуось a и средняя аномалия M_0 — по ориентирующим углам Φ.

На основании дифференциальных формул (527) составим две независимые системы нормальных уравнений, которые запишем, используя символику схемы Гаусса, т. е.

$$
\begin{aligned}
&[aa]_\Lambda d\Omega + [ab]_\Lambda dJ + [al]_\Lambda = 0;\\
&[ab]_\Lambda d\Omega + [bb]_\Lambda dJ + [bi]_\Lambda = 0;
\end{aligned}
\tag{528}
$$

$$
\begin{aligned}
&[aa]_\Phi dM_0 + [ab]_\Phi \frac{da}{a} + [al]_\Phi = 0;\\
&[ab]_\Phi dM_0 + [bb]_\Phi \frac{da}{a} + [bl]_\Phi = 0.
\end{aligned}
\tag{529}
$$

На основании принципа наименьших квадратов $[pv^2] = \min$ выражения весов неизвестных для каждой системы определяются как

$$
\begin{aligned}
&P_\Omega = [aa]_\Lambda - \frac{[ab]^2_\Lambda}{[bb]_\Lambda};\quad P_J = P_\Omega\frac{[bb]_\Lambda}{[aa]_\Lambda};\\
&P_{M_0} = [aa]_\Phi - \frac{[ab]^2_\Phi}{[bb]_\Phi};\quad P_\beta = P_{M_0}\frac{[bb]_\Phi}{[aa]_\Phi},
\end{aligned}
\tag{530}
$$

где $\beta = \dfrac{da}{a}$.

После длительных преобразований гауссовы коэффициенты получим в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} [aa]_\Lambda &= N \\ [ab]_\Lambda &= [\operatorname{ctg}\delta] \\ [bb]_\Lambda &= [\operatorname{ctg}^2\delta] \end{aligned}\right\} \text{углы } \Lambda; \tag{531}$$

$$\left.\begin{aligned} [aa]_\Phi &= N \\ [ab]_\Phi &= -\left[\frac{3}{2}n\Delta t\,\frac{N(N+1)}{2} - \frac{NB}{2a}\right] \\ [bb]_\Phi &= \frac{9}{2}n^2\Delta t\,\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - \\ &- \frac{3}{2}n\Delta t\,\frac{B}{a}\,\frac{N(N+1)}{2} + N\frac{B^2}{4a^2} \end{aligned}\right\} \text{углы } \Phi, \tag{532}$$

где n — число базисов.

Средние квадратические ошибки элементов орбиты получим по формулам:

$$\left.\begin{aligned} m_\Omega &= \frac{m_{\bar{B}^0}}{\sqrt{P_\Omega}}; \quad m_J = \frac{m_{\bar{B}^0}}{\sqrt{P_J}}; \\ m_{M_0} &= \frac{m_{\bar{B}^0}}{\sqrt{P_{M_0}}}; \quad m_a = a\frac{m_{\bar{B}^0}}{\rho}\,\frac{1}{\sqrt{P_\beta}}. \end{aligned}\right\} \tag{533}$$

Анализируя формулы (530) для весов элементов, убеждаемся, что максимальной точности определения долготы восходящего узла и наклонения можно достичь при условии

$$\frac{[\operatorname{ctg}\delta]^2}{[\operatorname{ctg}^2\delta]} = 0, \tag{534}$$

т. е. когда склонения δ удовлетворяют требованию

$$\delta_1 = -\delta_2;\ \delta_2 = -\delta_3,\ \ldots,\ \delta_{2N-1} = -\delta_{2N}. \tag{535}$$

В этом случае

$$m_\Omega = \frac{m_{\bar{B}^0}}{\sqrt{N}}; \quad m_J = \frac{m_{\bar{B}^0}}{\sqrt{N\,[\operatorname{ctg}^2\delta]}}. \tag{536}$$

Сравнив формулы средних квадратических ошибок для внешних и внутренних элементов, убеждаемся, что по мере увеличения числа базисов точность определения Ω и J возрастает значительно быстрее, чем точность внутренних элементов орбиты a и M_0. Так, при $N=10$ и $m_{\bar{B}^0} = 10''$ ошибка в долготе восходящего узла составит $3''$, в то время как $m_{M_0} = 6{,}5''$, а $m_a = 805$ м. Таким образом, внешние элементы (при использовании для уточнения орбит условия компланарности) определяются гораздо точнее внутренних.

Таблица 25

Число базисов N	m_a, м	P_β	m_{M_0}, угл. с	P_{M_0}
10	805	0,16	6,5	2,4
20	283	1,32	4,5	4,9
30	154	4,47	3,7	7,4
40	100	10,6	3,2	9,9
50	72	20,7	2,8	12,4
60	54	35,8	2,6	14,9
70	43	56,8	2,4	17,4

Выполним расчет средних квадратических ошибок m_a и m_{M_0} как функций числа базисов N, включенных в обработку для модели с характеристиками (522) и принятыми начальными условиями при $m_{\overline{B}_0} = 10''$ (табл. 25).

В этой главе были рассмотрены два метода дифференциального уточнения орбиты: основанный на использовании уравнений коллинеарности и на условии компланарности.

Сравним пример 18, в котором было выполнено дифференциальное уточнение орбиты по двум снимкам (шесть точек) с использованием уравнений коллинеарности, с расчетом точности определения элементов круговой орбиты по формулам (531)—(533), когда определены направления лишь двух базисов (табл. 26). Как видим, точность определения угловых элементов орбиты с использованием уравнений колинеарности примерно в 20 раз ниже. При этом точность определения большой полуоси в 20 раз выше.

Таким образом, каждый из рассмотренных методов имеет свои преимущества и недостатки, поэтому в производственных условиях необходимо располагать пакетами программ, реализующих оба метода.

Таблица 26

Ошибка	Метод, основанный на применении:	
	уравнений коллинеарности	условия компланарности
m_a, м	494	10 342
m_{M_0}, угл. с	400	18
M_J, угл. с	200	10
M_ϱ, угл. с	200	7

Важным преимуществом метода, основанного на условии компланарности, является возможность определения орбиты при отсутствии исходных пунктов на снимках, что делает этот метод полностью автономным. Масштаб при этом задается планетоцентрической гравитационной постоянной. Возможна такая же модификация метода дифференциального уточнения орбиты, основанного на уравнениях коллинеарности.

Глава VII
КОСМИЧЕСКАЯ ФОТОТРИАНГУЛЯЦИЯ С ОДНОВРЕМЕННЫМ ОПРЕДЕЛЕНИЕМ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ДВИЖЕНИЯ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ

§ 36. СИСТЕМА ОБОЗНАЧЕНИЙ И ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

В космической фототриангуляции, построение которой выполняется с использованием синхронных снимков планеты и звездного неба, в качестве неизвестных принимают следующие величины:

координаты точек планеты в планетоцентрической системе координат, зафиксированной относительно тела планеты (для Земли в гринвичской системе);

угловые элементы внешнего ориентирования топографических снимков;

начальные условия движения ИСЗ (чаще всего в виде координат и составляющих скорости X_0, Y_0, Z_0, $\dot{X}_0$, $\dot{Y}_0$, $\dot{Z}_0$ на начальную эпоху);

поправки в моменты фотографирования t_i.

Особенностью такого типа аналитической космической фототриангуляции является то, что координаты центров фотографирования не входят в число неизвестных при уравнении, а определяются путем интегрирования дифференциальных уравнений движения с уточненными в процессе уравнительных вычислений начальными условиями движения. Таким образом, космическая фототриангуляция является своеобразной разновидностью орбитального метода космической геодезии. Если кроме фотограмметрической информации использовать показания лазерного дальномера с фиксацией отраженного от точки планеты импульса, то жесткость космической фототриангуляции существенно увеличится и повысится точность определяемых элементов.

Введем следующую систему обозначений, имеющую важное значение при создании сложного алгоритма математической обработки космической фототриангуляции:

k — номер маршрута (орбитального витка);

ik — номер снимка i на k-м витке (маршруте);

j — номер точки поверхности планеты;

ikj — номер j-й точки на i-м топографическом снимке k-го витка;

s — число маршрутов;

m_k — число снимков на k-м витке;

$m = \sum_{k=1}^{s} m_k$ — число снимков, включенных в обработку в блоке;

n — число точек поверхности планеты;

X^0 — результат измерений;

X^{00} — приближенное (предварительное) значение измеренной величины;

x, y — координаты точек топографического снимка (в этой главе тильду сверху опускаем);

X, Y, Z — гринвичские планетоцентрические координаты;

x_p, y_p — координаты главной точки снимка;

f_t — фокусное расстояние топографической камеры;

$\Pi_i = (\mathbf{S}_i \Pi_i \Pi_0)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ — оператор ориентации топографической камеры в гринвичской системе координат;

Ω_{ik}, ω_{ik}, J_{ik} — эйлеровы углы, определяющие ориентацию ik-го топографического снимка в гринвичской системе координат;

$\underset{(2,3)}{\hat{\mathbf{B}}^{(1)}_{ikj}} = \dfrac{\partial(x_{ikj},\ y_{ikj})}{\partial(\Omega_{ik},\ \omega_{ik},\ J_{ik})}$ — матрица производных от координат ikj-й точки снимка по эйлеровым углам;

$\underset{(3,1)}{\hat{\delta}^{(1)}_{ik}} = \begin{bmatrix} d\Omega_{ik} \\ d\omega_{ik} \\ dJ_{ik} \end{bmatrix}$ — вектор поправок в ik-е эйлеровы углы;

$\underset{(2,3)}{\hat{\mathbf{B}}^{(2)}_{ikj}} = \dfrac{\partial(x_{ikj},\ y_{ikj})}{\partial(X_{ik},\ Y_{ik},\ Z_{ik})}$ — матрица производных от координат ikj-й точки снимка по ik-м координатам центра фотографирования;

$\underset{(3,1)}{\bar{\delta}^{(2)}_{ik}} = \begin{bmatrix} dX_{ik} \\ dY_{ik} \\ dZ_{ik} \end{bmatrix}$ — вектор поправок в координаты ik-го центра фотографирования;

$\underset{(2,3)}{\ddot{\mathbf{B}}_{ikj}} = \dfrac{\partial(x_{ikj},\ y_{ikj})}{\partial(X_j,\ Y_j,\ Z_j)}$ — матрица производных от координат ikj-й точки снимка по гринвичским координатам j-й точки поверхности планеты;

$\underset{(3,1)}{\bar{\bar{\delta}}_j} = \begin{bmatrix} dX_j \\ dY_j \\ dZ_j \end{bmatrix}$ — вектор поправок в гринвичские координаты j-й точки поверхности планеты;

$\tilde{\mathbf{B}}_{ik} = \dfrac{\partial(X_{ik}, Y_{ik}, Z_{ik})}{\partial(t_{ik})}$ — матрица производных от гринвичских координат ik-ых центров фотографирования по ikму моменту фотографирования;

$\underset{(1,1)}{\tilde{\bar{\delta}}} = (dt_{ik})$ — поправка в ik-й момент фотографирования;

$\underset{(3,6)}{\overset{0}{\mathbf{B}}_{ik}} = \dfrac{\partial(X_{ik}, Y_{ik}, Z_{ik})}{\partial(X_{ok}, Y_{ok}, Z_{ok}, \dot{X}_{ok}, \dot{Y}_{ok}, \dot{Z}_k)}$ — матрица изохронных производных—от координат ik-го центра фотографирования по начальным условиям движения ИСЗ в эпоху t_{ok} для k-го орбитального витка;

$\underset{(6,1)}{\overset{0}{\bar{\delta}}_k} = \begin{bmatrix} dX_{ok} \\ dY_{ok} \\ dZ_{ok} \\ d\dot{X}_{ok} \\ d\dot{Y}_{ok} \\ d\dot{Z}_{ok} \end{bmatrix}$ — вектор поправок в начальные условия для эпохи t_{ok} k-го витка;

$\underset{(2,1)}{\bar{\varepsilon}_{ikj}} = \begin{bmatrix} \lambda^0_{ikj} - \lambda^{00}_{ikj} \\ y^0_{ikj} - y^{00}_{ikj} \end{bmatrix}$ — вектор свободных членов уравнений поправок ikj-й точки снимка;

$\bar{\mathbf{v}}_{ikj} = \begin{bmatrix} v_{x_{ikj}} \\ v_{y_{ikj}} \end{bmatrix}$ — вектор поправок в измеренные на снимке координаты ikj-й точки снимка.

Линеаризованное уравнение поправок (208), соответствующее фундаментальному уравнению космической фотограмметрии, с учетом принятой системы обозначений запишем в следующем виде:

$$\bar{\mathbf{v}}_{ikj} + \underset{(2,3)}{\hat{\mathbf{B}}^{(1)}_{ikj}} \underset{(3,1)}{\bar{\hat{\delta}}^{(1)}_{ik}} + \underset{(2,3)}{\hat{\mathbf{B}}^{(2)}_{ikj}} \hat{\delta}^{(2)} + \underset{(2,3)}{\ddot{\mathbf{B}}_{ikj}} \underset{(3,1)}{\bar{\bar{\delta}}_l} = \underset{(2,1)}{\bar{\varepsilon}_{ikj}}. \qquad (537)$$

Поскольку координаты центров фотографирования — функции начальных условий движения, т. е.

$$\begin{bmatrix} X_{ik} \\ Y_{ik} \\ Z_{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{ik}(X_{ok},\ Y_{ok},\ Z_{ok},\ \dot{X}_{ok},\ \dot{Y}_{ok},\ \dot{Z}_{ok},\ t_{ik}-t_0) \\ Y_{ik}(X_{ok},\ Y_{ok},\ Z_{ok},\ \dot{X}_{ok},\ \dot{Y}_{ok},\ \dot{Z}_{ok},\ t_{ik}-t_0) \\ Z_{ik}(X_{ok},\ Y_{ok},\ Z_{ok},\ \dot{X}_{ok},\ \dot{Y}_{ok},\ \dot{Z}_{ok},\ t_{ik}-t_0) \end{bmatrix}, \quad (538)$$

исключим из уравнения (537) вектор $\underset{(3,1)}{\bar{\hat{\delta}}^{(2)}_{ik}}$. Введем в это уравнение поправки в начальные условия и моменты фотографирования

$$\underset{(3,1)}{\bar{\hat{\delta}}^{(2)}_{ik}} = \begin{bmatrix} dX_{ik} \\ dY_{ik} \\ dZ_{ik} \end{bmatrix} = \underset{(3,1)}{\tilde{\mathbf{B}}_{ik}} \underset{(1,1)}{\bar{\tilde{\delta}}_{ik}} + \underset{(3,6)}{\overset{0}{\mathbf{B}}_{ik}} \underset{(6,1)}{\bar{\delta}_{ik}} \quad (539)$$

и, подставив значение вектора поправок $\underset{(3,1)}{\hat{\delta}^{(2)}_{ik}}$ в координаты центров фотографирования, определяемого формулой (539), в уравнение (537), получим это уравнение в следующем виде:

$$\underset{(2,1)}{\bar{\mathbf{v}}_{ikj}} + \underset{(2,4)}{\dot{\mathbf{B}}_{ikj}} \underset{(4,1)}{\bar{\dot{\delta}}_{ik}} + \underset{(2,6)}{\overset{0}{\mathbf{B}}} \underset{(6,1)}{\bar{\delta}_{ik}} + \underset{(2,3)}{\ddot{\mathbf{B}}_{ikj}} \underset{(3,1)}{\bar{\ddot{\delta}}_{j}} = \underset{(2,1)}{\bar{\varepsilon}_{ikj}}. \quad (540)$$

В выражении (540)

$$\underset{(2,4)}{\dot{\mathbf{B}}_{ikj}} = \left[\underset{(2,3)}{\hat{\mathbf{B}}^{(1)}_{ikj}} \underset{(2,3)}{\hat{\mathbf{B}}^{(2)}_{ikj}} \underset{(3,1)}{\tilde{\mathbf{B}}_{ik}} \right]; \quad \underset{(4,1)}{\bar{\dot{\delta}}_{ik}} = \begin{bmatrix} \underset{(3,1)}{\bar{\hat{\delta}}^{(1)}_{ik}} \\ \underset{(1,1)}{\bar{\hat{\delta}}_{ik}} \end{bmatrix}. \quad (541)$$

Как следует из выражений (541), вектор поправок $\underset{(4,1)}{\bar{\dot{\delta}}_{ik}}$ объединяет поправки в угловые элементы внешнего ориентирования Ω_{ik}, ω_{ik}, J_{ik} ik-го снимка и поправки в моменты фотографирования t_{ik}. Вектор поправок $\underset{ik}{\hat{\delta}^{(2)}}$ в координаты ik-го центра фотографирования заменим вектором поправок $\underset{(6,1)}{\bar{\delta}_{ik}}$ в начальные условия движения X_{ok}, Y_{ok}, Z_{ok}, $\dot{X}_{ok}$, $\dot{Y}_{ok}$, $\dot{Z}_{ok}$. На k-м орбитальном витке, включающем m_k снимков, введем $3m_k$ поправок в координаты центров фотографирования. Заменим вектор поправок в координаты центров фотографирования, содержащий $3m_k$ неизвестных, шестью поправками в начальные условия для k-го витка (вектор поправок $\underset{(6,1)}{\bar{\delta}_{ik}}$ в начальные условия). Это ведет к повышению жесткости и стабильности уравниваемой фототриангуляции и значительно уменьшает число неизвестных, входящих в уравнительные вычисления.

§ 37. СТРУКТУРА УРАВНЕНИЙ ПОПРАВОК

Неизвестные, входящие в уравнения поправок космической фототриангуляции, составляют три группы.

Первая группа: угловые элементы внешнего ориентирования топографических снимков Ω_{ik}, ω_{ik}, J_{ik} и моменты фотографирования t_{ik}.

Вторая группа: компоненты вектора начальных условий X_{ok}, Y_{ok}, Z_{ok}, $\dot{X}_{ok}$, $\dot{Y}_{ok}$, $\dot{Z}_{ok}$.

Третья группа: координаты точек поверхности планеты X_j, Y_j, Z_j.

Первой группе неизвестных соответствует уравнение поправок

$$\underset{(4,1)}{\dot{\mathbf{v}}} - \underset{(4,1)}{\dot{\delta}_{ik}} = \underset{(4,1)}{\dot{\varepsilon}_{ik}}, \tag{542}$$

где

$$\underset{(4,1)}{\dot{\mathbf{v}}_{ik}} = \begin{bmatrix} v_\Omega \\ v_\omega \\ v_J \\ v_t \end{bmatrix}_{ik}; \quad \underset{(4,1)}{\dot{\delta}_{ik}} = \begin{bmatrix} d\Omega \\ d\omega \\ dJ \\ dt \end{bmatrix}; \quad \underset{(4,1)}{\dot{\varepsilon}_{ik}} = \begin{bmatrix} \Omega^{00} - \Omega^{0} \\ \omega^{00} - \omega^{0} \\ J^{00} - J^{0} \\ t^{00} - t^{0} \end{bmatrix}. \tag{543}$$

Учитывая, что угловые элементы внешнего ориентирования коррелируют, но не зависят от случайной ошибки определения момента экспозиции, ковариационная матрица, соответствующая уравнению поправок (542), будет иметь вид:

$$\underset{(4,4)}{\dot{\mathbf{K}}_{ik}} = \begin{bmatrix} q_{\Omega\Omega} & q_{\Omega\omega} & q_{\Omega J} & 0 \\ q_{\omega\Omega} & q_{\omega\omega} & q_{\omega J} & 0 \\ q_{J\Omega} & q_{J\omega} & q_{JJ} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{tt} \end{bmatrix}, \tag{544}$$

а весовая матрица

$$\underset{(4,4)}{\dot{\mathbf{W}}} = \underset{(4,4)}{\dot{\mathbf{K}}_{ik}^{-1}}. \tag{545}$$

Второй группе неизвестных будет соответствовать уравнение поправок

$$\underset{(6,1)}{\bar{\mathbf{v}}_k} - \underset{(6,1)}{\bar{\delta}_k} = \underset{(6,1)}{\bar{\varepsilon}_k}, \tag{546}$$

где

$$\underset{(6,1)}{\overset{0}{\mathbf{v}}_k} = \begin{bmatrix} v_{X_{ok}} \\ v_{Y_{ok}} \\ v_{Z_{ok}} \\ v_{\dot{X}_{ok}} \\ v_{\dot{Y}_{ok}} \\ v_{\dot{Z}_{ok}} \end{bmatrix}; \quad \underset{(6,1)}{\overset{0}{\delta}_k} = \begin{bmatrix} dX_{ok} \\ dY_{ok} \\ dZ_{ok} \\ d\dot{X}_{ok} \\ d\dot{Y}_{ok} \\ d\dot{Z}_{ok} \end{bmatrix}; \quad \underset{(6,1)}{\overset{0}{\varepsilon}_k} = \begin{bmatrix} X_{ok}^{00} - X_{ok}^{0} \\ Y_{ok}^{00} - Y_{ok}^{0} \\ Z_{ok}^{00} - Z_{ok}^{0} \\ \dot{X}_{ok}^{00} - \dot{X}_{ok}^{0} \\ \dot{Y}_{ok}^{00} - \dot{Y}_{ok}^{0} \\ \dot{Z}_{ok}^{00} - \dot{Z}_{ok}^{0} \end{bmatrix}, \tag{547}$$

Уравнению (546) соответствует весовая матрица

$$\underset{(6,6)}{\overset{0}{\mathbf{W}}_k} = \underset{(6,6)}{\overset{0}{\mathbf{K}}_k^{-1}}. \tag{548}$$

В выражении (548) $\overset{0}{\mathbf{K}}_{ik}^{-1}$ — ковариационная матрица априорных значений вектора начальных условий. Наконец, последнее уравнение поправок соответствует третьей группе неизвестных — определяемым координатам точек поверхности планеты

$$\underset{(3,1)}{\ddot{\mathbf{v}}} - \underset{(3,1)}{\ddot{\delta}_j} = \underset{(3,1)}{\ddot{\varepsilon}_j}, \tag{549}$$

где

$$\underset{(3,1)}{\ddot{\mathbf{v}}} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}_j; \quad \underset{(3,1)}{\ddot{\delta}_j} = \begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{bmatrix}_j; \quad \underset{(3,1)}{\ddot{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} X_j^{00} - X_j^{0} \\ Y_j^{00} - Y_j^{0} \\ Z_j^{00} - Z_j^{0} \end{bmatrix}. \tag{550}$$

При этом для каждой j-й точки планеты составим ковариационную матрицу

$$\underset{(3,3)}{\mathbf{K}_j} = \begin{bmatrix} q_{XX} & q_{XY} & q_{XZ} \\ q_{XY} & q_{YY} & q_{YZ} \\ q_{XZ} & q_{YZ} & q_{ZZ} \end{bmatrix}. \tag{551}$$

Сети, состоящей из n точек, соответствует система уравнений поправок

$$\underset{(3n,\,1)}{\ddot{\mathbf{v}}} - \underset{(3n,\,1)}{\ddot{\delta}} = \underset{(3n,\,1)}{\ddot{\varepsilon}} \tag{552}$$

При этом корреляция между координатами точек практически отсутствует, поэтому ковариационная матрица для n точек будет иметь диагональный вид, т. е.

$$\underset{(3n,3n)}{\ddot{\mathbf{K}}} = \operatorname{diag}(\underset{(3,3)}{\ddot{\mathbf{K}}_1}, \underset{(3,3)}{\ddot{\mathbf{K}}_2}, \ldots, \underset{(3,3)}{\ddot{\mathbf{K}}_n}). \tag{553}$$

Точно так же весовая матрица будет диагональной:

$$\underset{(3n,3n)}{\ddot{\mathbf{P}}} = \underset{(3n,3n)}{\ddot{\mathbf{K}}^{-1}} = \operatorname{diag}(\underset{(3,3)}{\ddot{\mathbf{W}}_1}, \underset{(3,3)}{\ddot{\mathbf{W}}_2}, \ldots, \underset{(3,3)}{\ddot{\mathbf{W}}_n}). \tag{554}$$

§ 38. СИСТЕМА НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ k-го МАРШРУТА (ВИТКА)

Линеаризованное уравнение (540) запишем в следующей форме:

$$\mathbf{v}_{ikj} + \mathbf{B}_{ikj}\,\delta_{ikj} = \varepsilon_{ikj}, \tag{555}$$

в котором

$$\underset{(2,13)}{\mathbf{B}_{ikj}} = [\underset{(2,4)}{\dot{\mathbf{B}}_{ikj}}\ \overset{0}{\underset{(2,6)}{\mathbf{B}_{ikj}}}\ \underset{(2,3)}{\ddot{\mathbf{B}}_{ikj}}]; \tag{556}$$

$$\underset{(13,1)}{\bar{\delta}_{ikj}} = [\underset{(4,1)}{\dot{\delta}_{ik}^{\mathrm{T}}}\ \overset{0}{\underset{(6,1)}{\delta_k^{\mathrm{T}}}}\ \underset{(3,1)}{\ddot{\delta}_j^{\mathrm{T}}}]^{\mathrm{T}}. \tag{557}$$

Ковариационную матрицу непосредственных измерений на снимке, соответствующую уравнению (549), представим в виде

$$\underset{(2,2)}{\mathbf{K}_{ikj}} = \begin{bmatrix} q_{xx} & q_{xy} \\ q_{xy} & q_{yy} \end{bmatrix}_{ikj}, \tag{558}$$

а также весовую матрицу

$$\underset{(2,2)}{\mathbf{W}_{ikj}} = \underset{(2,2)}{\mathbf{K}_{ikj}^{-1}}. \tag{559}$$

Составим пока формально систему нормальных уравнений, соответствующую уравнению (555):

$$(\underset{(13,2)}{\mathbf{B}_{ikj}^{\mathrm{T}}}\ \underset{(2,2)}{\mathbf{W}_{ikj}}\ \underset{(2,13)}{\mathbf{B}})\ \underset{(13,1)}{\bar{\delta}_{ikj}} = \underset{(13,2)}{\mathbf{B}_{ikj}^{\mathrm{T}}}\ \underset{(2,2)}{\mathbf{W}_{ikj}}\ \underset{(2,1)}{\bar{\varepsilon}_{ikj}}, \tag{560}$$

которую с учетом выражения (557) можно записать в развернутом виде, т. е.

$$\begin{bmatrix} \underset{(4,4)}{\dot{\mathbf{N}}_{ikj}} & \underset{(4,6)}{\tilde{\mathbf{N}}_{ikj}} & \underset{(4,3)}{\bar{\mathbf{N}}_{ikj}} \\ \underset{(6,4)}{\tilde{\mathbf{N}}_{ikj}^{\mathrm{T}}} & \overset{0}{\underset{(6,6)}{\mathbf{N}_{ikj}}} & \underset{(6,3)}{\hat{\mathbf{N}}_{ikj}} \\ \underset{(3,4)}{\bar{\mathbf{N}}_{ikj}^{\mathrm{T}}} & \underset{(3,6)}{\hat{\mathbf{N}}_{ikj}^{\mathrm{T}}} & \underset{(3,3)}{\ddot{\mathbf{N}}_{ikj}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underset{(4,1)}{\dot{\bar{\delta}}_{ik}} \\ \underset{(6,1)}{\overset{0}{\bar{\delta}}_{ik}} \\ \underset{(3,1)}{\ddot{\bar{\delta}}_{ik}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{(4,1)}{\dot{\mathbf{C}}_{ikj}} \\ \underset{(6,1)}{\overset{0}{\mathbf{C}}_{ikj}} \\ \underset{(3,1)}{\ddot{\mathbf{C}}_{ikj}} \end{bmatrix}; \tag{561}$$

$$\underset{(4,4)}{\overset{0}{\mathbf{N}}_{ikj}} = \underset{(4,2)}{\dot{\mathbf{B}}_{ikj}^{\mathrm{T}}}\ \underset{(2,2)}{\mathbf{W}_{ikj}}\ \underset{(2,4)}{\dot{\mathbf{B}}_{ikj}}; \qquad \underset{(4,1)}{\dot{\mathbf{C}}_{ikj}} = \underset{(4,2)}{\dot{\mathbf{B}}_{ikj}^{\mathrm{T}}}\ \underset{(2,2)}{\mathbf{W}_{ikj}}\ \underset{(2,1)}{\bar{\varepsilon}_{ikj}};$$

$$\underset{(6,6)}{\overset{0}{\mathbf{N}}_{ikj}} = \underset{(6,2)}{\overset{0}{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}_{ikj}} \underset{(2,2)}{\mathbf{W}_{ikj}} \underset{(2,6)}{\overset{0}{\mathbf{B}}_{ikj}}; \qquad \underset{(6,1)}{\overset{0}{\mathbf{C}}_{ikj}} = \underset{(6,2)}{\overset{0}{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}_{ikj}} \underset{(2,2)}{\mathbf{W}_{ikj}} \underset{(2,1)}{\bar{\varepsilon}_{ikj}};$$

$$\underset{(3,3)}{\ddot{\mathbf{N}}_{ikj}} = \underset{(3,2)}{\ddot{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}_{ikj}} \underset{(2,2)}{\mathbf{W}_{ikj}} \underset{(2,3)}{\ddot{\mathbf{B}}_{ikj}}; \quad \underset{(3,1)}{\ddot{\mathbf{C}}} = \underset{(3,2)}{\ddot{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}} \underset{(2,2)}{\mathbf{W}_{ikj}} \underset{(2,1)}{\bar{\varepsilon}_{ikj}}.$$

$$\underset{(4,6)}{\tilde{\mathbf{N}}_{ikj}} = \underset{(4,2)}{\dot{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}_{ikj}} \underset{(2,2)}{\mathbf{W}_{ikj}} \underset{(2,6)}{\overset{0}{\mathbf{B}}_{ikj}}; \tag{562}$$

$$\underset{(4,3)}{\bar{\mathbf{N}}_{ikj}} = \underset{(4,2)}{\dot{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}_{ikj}} \underset{(2,2)}{\mathbf{W}_{ikj}} \underset{(2,3)}{\ddot{\mathbf{B}}_{ikj}},$$

$$\underset{(6,3)}{\hat{\mathbf{N}}_{ikj}} = \underset{(6,2)}{\overset{0}{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}_{ikj}} \underset{(2,2)}{\mathbf{W}_{ikj}} \underset{(2,3)}{\ddot{\mathbf{B}}_{ikj}};$$

Система (561) является неопределенной, так как включает тринадцать неизвестных, она соответствует двум уравнениям поправок для измеренных на снимке координат x^0 и y^0 одной точки.

Смысл введения этой неопределенной системы заключается в том, что девять матриц, входящих в уравнение (561), образуют основной конструктивный блок для формирования всей системы уравнений, возникающей в процессе обработки m_k снимков витка (маршрута).

Общая система уравнений, составленная для обработки всех точек, измеренных на m_k снимках витка, имеет вид:

угловые элементы ориентирования и моменты экспозиции				вектор начальных условий	координаты точек планеты			
снимок 1	снимок 2	...	снимок m_k	виток k	точка 1	точка 2	...	точка n
$\overset{0}{\mathbf{N}}_{1_k}+\dot{\mathbf{W}}_{1_k}$	0	...	0	$\tilde{\mathbf{N}}_{1_k}$	$\bar{\mathbf{N}}_{1_k1}$	$\bar{\mathbf{N}}_{1_k2}$	...	$\bar{\mathbf{N}}_{1_kn}$
0	$\overset{0}{\mathbf{N}}_{2_k}+\dot{\mathbf{W}}_{2_k}$	...	0	$\tilde{\mathbf{N}}_{2_k}$	$\bar{\mathbf{N}}_{2_k1}$	$\bar{\mathbf{N}}_{2_k2}$	...	$\bar{\mathbf{N}}_{2_kn}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
0	0	...	$\overset{0}{\mathbf{N}}_{m_k}+\dot{\mathbf{W}}_{m_k}$	$\tilde{\mathbf{N}}_{m_k}$	$\bar{\mathbf{N}}_{m_k1}$	$\bar{\mathbf{N}}_{m_k2}$	...	$\bar{\mathbf{N}}_{m_kn}$
$\tilde{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}_{1_k}$	$\tilde{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}_{2_k}$	...	$\tilde{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}_{m_k}$	$\overset{0}{\mathbf{N}}_k+\overset{0}{\mathbf{W}}_k$	$\hat{\mathbf{N}}_{k1}$	$\hat{\mathbf{N}}_{k2}$	...	$\hat{\mathbf{N}}_{kn}$
$\bar{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}_{1_k1}$	$\bar{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}_{2_k2}$	...	$\bar{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}_{m_k1}$	$\hat{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}_{k1}$	$\ddot{\mathbf{N}}_{k1}+\ddot{\mathbf{W}}_1$	0	...	0
$\bar{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}_{1_k2}$	$\bar{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}_{2_k2}$	...	$\bar{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}_{m_k2}$	$\hat{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}_{k2}$	...	$\ddot{\mathbf{N}}_{k2}+\ddot{\mathbf{W}}_2$	...	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$\bar{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}_{1_kn}$	$\bar{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}_{2_kn}$	...	$\bar{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}_{m_kn}$	$\hat{\mathbf{N}}^{\mathrm{T}}_{kn}$	0	0	...	$\ddot{\mathbf{N}}_{kn}+\ddot{\mathbf{W}}_n$

$\times$

$$\times \begin{bmatrix} \dot{\delta}_{1_k} \\ \dot{\delta}_{2_k} \\ \dots \\ \dot{\delta}_{m_k} \\ \hline \overset{0}{\delta}_k \\ \hline \ddot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_2 \\ \dots \\ \ddot{\delta}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{C}_{1_k} - \dot{W}_{1_k} \dot{e}_{1_k} \\ \dot{C}_{2_k} - \dot{W}_{2_k} \dot{e}_{2_k} \\ \dots \\ \dot{C}_{m_k} - \dot{W}_{m_k} \dot{e}_{m_k} \\ \hline \overset{0}{C}_k - \overset{0}{W}_k \overset{0}{e}_k \\ \hline \ddot{C}_{k1} - \ddot{W}_1 \ddot{e}_1 \\ \ddot{C}_{k2} - \ddot{W}_2 \ddot{e}_2 \\ \dots \\ \ddot{C}_{kn} - \ddot{W}_n \ddot{e}_n \end{bmatrix}. \tag{563}$$

Все элементы, входящие в эту сложную систему, определяют с помощью основных соотношений (562).

При этом величины $\tilde{\mathbf{N}}_{ikj}$ вычисляют непосредственно по формулам (562), а остальные путем простого или двойного суммирования величин, входящих в формулы (563), т. е.

$$\begin{aligned}
&\dot{\mathbf{N}}_{i_k} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{N}_{i_k j}; \quad \tilde{\mathbf{N}}_{i_k} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\mathbf{N}}_{i_k j}; \\
&\dot{\mathbf{C}}_{i_k} = \sum_{j=1}^{n} \dot{\mathbf{C}}_{i_k j}; \quad \overset{0}{\mathbf{N}}_k = \sum_{i=1}^{m_k} \sum_{j=1}^{n} \overset{0}{\mathbf{N}}_{i_k j}; \\
&\hat{\mathbf{N}}_{k_j} = \sum_{i=1}^{m_k} \hat{\mathbf{N}}_{i_k j}; \quad \overset{0}{\mathbf{C}}_k = \sum_{j=1k}^{m_k} \sum_{j=1}^{n} \overset{0}{\mathbf{C}}_{i_k j}; \\
&\ddot{\mathbf{N}}_{k_j} = \sum_{i=1k}^{m_k} \ddot{\mathbf{N}}_{i_k j}; \quad \ddot{\mathbf{C}}_{k_j} = \sum_{i=1k}^{m_k} \ddot{\mathbf{C}}_{i_k j}.
\end{aligned} \tag{564}$$

Кроме величин, определяемых путем суммирования по формулам (564), в общую систему (563) входят весовые матрицы $\dot{\mathbf{W}}_{ik}$, $\overset{0}{\mathbf{W}}_k$ и $\ddot{\mathbf{W}}_j$, строгое определение которых — сложная задача.

Можно констатировать, что если известны ковариационные матрицы уравнений поправок (542) и (549), то матрицы $\dot{\mathbf{W}}_k$ и $\ddot{\mathbf{W}}_j$ будут диагональными:

$$\underset{(4mk,4nk)}{\dot{\mathbf{W}}_k} = \operatorname{diag}\left(\underset{(4,4)}{\dot{\mathbf{W}}_{1_k}}, \underset{(4,4)}{\dot{\mathbf{W}}_{2_k}}, \ldots, \dot{\mathbf{W}}_{m_k}\right); \tag{565}$$

$$\underset{(3n,3n)}{\ddot{\mathbf{W}}_j} = \operatorname{diag}\left(\underset{(3,3)}{\ddot{\mathbf{W}}_1}, \underset{(3,3)}{\ddot{\mathbf{W}}_2}, \ldots, \underset{(3,3)}{\ddot{\mathbf{W}}_{n_j}}\right). \tag{566}$$

Для определения ковариационной матрицы $\overset{0}{\mathbf{W}}_k$ необходимо располагать предварительной информацией об орбите.

§ 39. МАТРИЦА НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ БЛОКА КОСМИЧЕСКОЙ ФОТОТРИАНГУЛЯЦИИ

Систему нормальных уравнений (563), составленную при уравнивании k-го витка, используют для формирования матрицы нормальных уравнений орбитального блока, образуемого перекрывающимися витками (маршрутами).

С этой целью запишем в более компактной форме систему (563), сохраняя при записи только подматрицы, являющиеся клеточными:

$$\left[\begin{array}{c|c|cccc}
\bar{\mathbf{N}}_k + \dot{\mathbf{W}}_k & \hat{\mathbf{N}}_k & \bar{\mathbf{N}}_{k1} & \bar{\mathbf{N}}_{k2} & \cdots & \bar{\mathbf{N}}_{kn} \\
\hline
\hat{\mathbf{N}}_k^{\mathrm{T}} & \overset{0}{\mathbf{N}}_k + \overset{0}{\mathbf{W}}_k & \hat{\mathbf{N}}_{k1} & \hat{\mathbf{N}}_{k2} & \ldots & \hat{\mathbf{N}}_{kn} \\
\hline
\bar{\mathbf{N}}_{k1}^{\mathrm{T}} & \hat{\mathbf{N}}_{k1}^{\mathrm{T}} & \ddot{\mathbf{N}}_{k1} + \ddot{\mathbf{W}}_1 & 0 & \ldots & 0 \\
\bar{\mathbf{N}}_{k2}^{\mathrm{T}} & \hat{\mathbf{N}}_{k2}^{\mathrm{T}} & 0 & \ddot{\mathbf{N}}_{k2} + \ddot{\mathbf{W}}_2 & \ldots & 0 \\
\bar{\mathbf{N}}_{k3}^{\mathrm{T}} & \hat{\mathbf{N}}_{k3}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\bar{\mathbf{N}}_{kn}^{\mathrm{T}} & \hat{\mathbf{N}}_{kn}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & \ldots & \ddot{\mathbf{N}}_{kn} + \ddot{\mathbf{W}}_{kn}
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
\bar{\delta}_k \\
\hline
\overset{0}{\delta}_k \\
\hline
\ddot{\delta}_1 \\
\ddot{\delta}_2 \\
\ddot{\delta}_3 \\
\ldots \\
\ddot{\delta}_n
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
\bar{\mathbf{C}}_k - \mathbf{W}_k \varepsilon \\
\hline
\overset{0}{\mathbf{C}}_k - \mathbf{W}_k \varepsilon \\
\hline
\ddot{\mathbf{C}}_{k1} - \mathbf{W}_1 \varepsilon \\
\ddot{\mathbf{C}}_{k2} - \mathbf{W}_2 \varepsilon \\
\ddot{\mathbf{C}}_{k3} - \mathbf{W}_3 \varepsilon \\
\ldots \\
\ddot{\mathbf{C}}_{kn} - \mathbf{W}_n \varepsilon
\end{array}\right]. \tag{567}$$

Необходимо иметь в виду, что вектор δ уточняемых параметров блока, состоящего из s витков, имеет структуру

$$\bar{\delta} = (\dot{\delta}_1^{\mathrm{T}} \dot{\delta}_2^{\mathrm{T}} \ldots \dot{\delta}_s^{\mathrm{T}} \overset{0}{\delta}_1^{\mathrm{T}} \overset{0}{\delta}_2^{\mathrm{T}} \ldots \overset{0}{\delta}_s^{\mathrm{T}} \ddot{\delta}_1^{\mathrm{T}} \ddot{\delta}_2^{\mathrm{T}} \ldots \ddot{\delta}_n^{\mathrm{T}}). \tag{568}$$

Из уравнений (567) следует, что уравнения для k-го витка включают только подматрицы элементов вектора $\bar{\delta}$. Система нормальных уравнений, соответствующая орбитальному блоку, будет следующей.

угловые элементы ориентирования				начальные условия				координаты точек планеты			
виток 1	виток 2	...	виток s	виток 1	виток 2	...	виток s	виток 1	виток 2	...	виток s
$\dot{N}_1+\dot{W}_1$	0	...	0	$\tilde{N}_1$	0	...	0	$\bar{N}_{11}$	$\bar{N}_{12}$	...	$\bar{N}_{1n}$
0	$\dot{N}_2+\dot{W}_2$	...	0	0	$\tilde{N}_2$	...	0	$\bar{N}_{21}$	$\bar{N}_{22}$	...	$\bar{N}_{2n}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
0	0	...	$\dot{N}_s+\dot{W}_s$	0	0	...	$\tilde{N}_s$	$\bar{N}_{s1}$	$\bar{N}_{s2}$	...	$\bar{N}_{sn}$
$\tilde{N}_1^T$	0	...	0	$\overset{0}{N}_1+\overset{0}{W}_2$	0	...	0	$\hat{N}_{11}$	$\hat{N}_{12}$	...	$\hat{N}_{1n}$
0	$\tilde{N}_2^T$	...	0	0	$\overset{0}{N}_2+\overset{0}{W}_2$	...	0	$\hat{N}_{21}$	$\hat{N}_{22}$	...	$\hat{N}_{2n}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
0	0	...	$\tilde{N}_s^T$	0	0	...	$\overset{0}{N}_s+\overset{0}{W}_s$	$\hat{N}_{s1}$	$\hat{N}_{s2}$	...	$\hat{N}_{sn}$
$\bar{N}_{11}^T$	$\bar{N}_{21}^T$	...	$\bar{N}_{s1}^T$	$\hat{N}_{11}^T$	$\hat{N}_{21}^T$	...	$\hat{N}_{s1}^T$	$\ddot{N}_1+\ddot{W}_1$	0	...	0
$\bar{N}_{12}^T$	$\bar{N}_{22}^T$	...	$\bar{N}_{s2}^T$	$\hat{N}_{22}^T$	$\hat{N}_{22}^T$	...	$\hat{N}_{s2}^T$	0	$\ddot{N}_2+\ddot{W}_2$	...	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$\bar{N}_{1n}^T$	$\bar{N}_{2n}^T$	...	$\bar{N}_{sn}^T$	$\hat{N}_{1n}^T$	$\hat{N}_{2n}^T$	...	$\hat{N}_{sn}^T$	0	0	...	$\ddot{N}_n+\ddot{W}_n$

$\times$

$$\times \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \dots \\ \delta_s \\ \overset{0}{\delta}_1 \\ \overset{0}{\delta}_2 \\ \dots \\ \overset{0}{\delta}_s \\ \ddot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_2 \\ \dots \\ \ddot{\delta}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 - W_1 e_1 \\ C_2 - W_2 e_2 \\ \dots \\ C_s - W_s e_s \\ \overset{0}{C}_1 - \overset{0}{W}_1 \overset{0}{e}_1 \\ \overset{0}{C}_2 - \overset{0}{W}_2 \overset{0}{e}_2 \\ \dots \\ \overset{0}{C}_s - \overset{0}{W}_s \overset{0}{e}_s \\ \ddot{C}_1 - \ddot{W}_1 \ddot{e}_1 \\ \ddot{C}_2 - \ddot{W}_2 \ddot{e}_2 \\ \dots \\ \ddot{C}_n - \ddot{W}_n \ddot{e}_n \end{bmatrix}. \qquad (569)$$

Величины $\ddot{N}_j$ и $\ddot{C}_j$, входящие в уравнения (569), вычисляются суммированием:

$$\ddot{N}_j = \sum_{k=1}^{s} \ddot{N}_{kj}; \quad \ddot{C}_j = \sum_{k\ 1}^{s} \ddot{C}_{kj}. \qquad (570)$$

В системе нормальных уравнений орбитального блока (569) матрица нормальных уравнений содержит большое число нулевых элементов и является разреженной. Блоки $\mathbf{N}+\mathbf{W}$, $\tilde{\mathbf{N}}$, $\ddot{\mathbf{N}}+\mathbf{W}$ — диагональные, блоки $\bar{\mathbf{N}}$ и $\hat{\mathbf{N}}$ — разреженные, если одни и те же точки поверхности изображаются на небольшом количестве снимков, что неизбежно при небольших продольных и поперечных перекрытиях. Таким образом, решение задачи требует составления матрицы большого порядка, но сильно разреженной.

Порядок k системы нормальных уравнений орбитального блока определяется по формуле

$$k=4(m_1+m_2+\ \ldots\ +m_s)+6s+3n, \tag{571}$$

где $m_1+m_2+\ \ldots\ +m_s$ — общее число снимков блока; s — общее число витков, входящих в блок; n — общее число определяемых пунктов поверхности планеты.

Пусть, например, на каждом витке получено по двадцать снимков, число витков $s=10$, определяются координаты двухсот точек. Тогда порядок матрицы нормальных уравнений $k=1460$, и обращение такой матрицы трудно выполнимо даже с помощью современных ЭВМ. Однако диагональная структура некоторых из весовых подматриц позволяет построить ряд необходимых для решения задачи алгоритмов.

При высокой разреженности общей матрицы системы линейных уравнений, как показал Р. Тьюарсон, наиболее рациональным из вычислительных методов является модифицированный метод Гаусса.

При этом ведущие элементы выбирают так, чтобы исключать на каждом шаге гауссовых элиминаций минимальное локальное заполнение.

§ 40. ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЦЫ ИЗОХРОННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Как отмечалось выше, вычисление элементов матрицы $\overset{0}{\underset{(3,6)}{\mathbf{B}_{ik}}}$ изохронных производных, которая входит в основные уравнения космической фототриангуляции, является достаточно сложной вычислительной задачей. В настоящее время существует большое количество численных и аналитических методов определения матрицы $\overset{0}{\mathbf{B}}_{ik}$.

Аналитические методы не позволяют с достаточной точностью учесть влияние атмосферы на ИСЗ, имеющих низкую орбиту. Их в основном применяют для высоких ИСЗ, когда можно пренебречь влиянием атмосферы на точность определения элементов матрицы $\overset{0}{\mathbf{B}}_{ik}$.

Рассмотрим наиболее простой метод вычисления такой матрицы. Пусть для момента экспозиции t_{ik} необходимо определить элементы матрицы $\underset{(3,6)}{\overset{0}{\mathbf{B}}}_{ik}$ в гринвичской системе координат

$$\underset{(3,6)}{\overset{0}{\mathbf{B}}}_{ik} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_{ik}}{\partial X_{ok}} & \frac{\partial X_{ik}}{\partial Y_{ok}} & \frac{\partial X_{ik}}{\partial Z_{ok}} & \frac{\partial X_{ik}}{\partial \dot{X}_{ok}} & \frac{\partial X_{ik}}{\partial \dot{Y}_{ok}} & \frac{\partial X_{ik}}{\partial \dot{Z}_{ok}} \\ \frac{\partial Y_{ik}}{\partial X_{ok}} & \frac{\partial Y_{ik}}{\partial Y_{ok}} & \frac{\partial Y_{ik}}{\partial Z_{ok}} & \frac{\partial Y_{ik}}{\partial \dot{X}_{ok}} & \frac{\partial Y_{ik}}{\partial \dot{Y}_{ok}} & \frac{\partial Y_{ik}}{\partial \dot{Z}_{ok}} \\ \frac{\partial Z_{ik}}{\partial X_{ok}} & \frac{\partial Z_{ik}}{\partial Y_{ok}} & \frac{\partial Z_{ik}}{\partial Z_{ok}} & \frac{\partial Z_{ik}}{\partial \dot{X}_{ok}} & \frac{\partial Z_{ik}}{\partial \dot{Y}_{ok}} & \frac{\partial Z_{ik}}{\partial \dot{Z}_{ok}} \end{bmatrix}. \qquad (572)$$

При этом элементы вектора начальных $\underset{(6,1)}{\overset{0}{\bar{\mathbf{X}}}}_{ok}$ условий в гринвичской системе координат известны, т. е.

$$\underset{(6,1)}{\overset{0}{\bar{\mathbf{X}}}}_{ok} = [X_{ok},\ Y_{ok},\ Z_{ok},\ \dot{X}_{ok},\ \dot{Y}_{ok},\ \dot{Z}_{ok}]^{\top}. \qquad (573)$$

Модель движения ИСЗ в форме трех дифференциальных уравнений второго порядка в данном случае также удобно записать в гринвичской системе координат $oXYZ$, вращающейся вместе с Землей:

$$\begin{aligned} \ddot{X} - 2\omega_{\oplus}\dot{Y} - \omega_{\oplus}^2 X &= \frac{\partial V}{\partial X} + Q_x; \\ \ddot{Y} + 2\omega_{\oplus}\dot{X} - \omega_{\oplus}^2 Y &= \frac{\partial V}{\partial Y} + Q_y; \qquad (574) \\ \ddot{Z} &= \frac{\partial V}{\partial Z} + Q_z. \end{aligned}$$

В этих уравнениях $\omega_{\oplus} = \frac{dS}{dt} = 0{,}729\,211\,508 \cdot 10^{-4}$ рад/с — угловая скорость вращения Земли; $\frac{\partial V}{\partial X}$, $\frac{\partial V}{\partial Y}$, $\frac{\partial V}{\partial Z}$ — производные от гравитационного потенциала Земли (321) по осям гринвичской системы координат; Q_x, Q_y и Q_z — ускорения, обусловленные сопротивлением атмосферы.

В уравнения (574), в отличие от уравнений (397), записанных в инерциальной системе координат, входят члены, содержащие производные координат по времени ($2\omega_{\oplus}\dot{Y}$ и $2\omega_{\oplus}\dot{X}$), а также содержащие координаты ($\omega_{\oplus}^2 X$ и $\omega_{\oplus}^2 Y$).

Члены, содержащие производные от координат по времени, кориолисовы ускорения. Эти ускорения являются результатом одновременного вращения гринвичской системы координат и движения спутника относительно нее.

Члены, содержащие координаты, учитывают переносную скорость. Наличие в дифференциальных уравнениях (574) членов, содержащих производные координат по времени и координаты, является следствием одной из основных теорем кинематики. Согласно этой теореме абсолютное ускорение является суммой относительного, переносного и кориолисова (дополнительного) ускорений.

Предположим, что необходимо вычислить производную $\frac{\partial X_{ik}}{\partial X_{ik}}$.

Порядок вычислений будет следующим.

1. Интегрируем систему дифференциальных уравнений (574) на момент t_{ik} с начальными условиями (573). В результате получаем вектор $\mathbf{X}_{ik}=(X_{ik}, Y_{ik}, Z_{ik}, \dot{X}_{ik}, \dot{Y}_{ik}, \dot{Z}_{ik})$ текущих координат и составляющих скорости ИСЗ на момент t_{ik}.

2. Придадим теперь начальному элементу X_{ok} малое (2—3 % от его значения) приращение δX_{ok} и снова выполним интегрирование системы (574) с варьированными начальными условиями

$$\overline{\mathbf{X}}_{ok}^{(1)}=(X_{ok}+\delta X_{ok}, Y_{ok}, Z_{ok}, \dot{X}_{ok}, \dot{Y}_{ok}, \dot{Z}_{ok}). \tag{575}$$

В результате получим варьированный вектор $\mathbf{X}_{ik}$ на момент t_{ik}:

$$\overline{\mathbf{X}}_{ik}^{(1)}=(X_{ik}^{(1)}, Y_{ik}^{(1)}, Z_{ik}^{(1)}, \dot{X}_{ik}^{(1)}, \dot{Y}_{ik}^{(1)}, \dot{Z}_{ik}^{(1)}). \tag{576}$$

3. Производная $\frac{\partial X_{ik}}{\partial X_{ok}}$ определится из выражения

$$\frac{\partial X_{ik}}{\partial X_{ok}}\approx\frac{X_{ik}^{(1)}-X_{ik}}{\delta X_{ok}}. \tag{577}$$

Одновременно выразим и две остальные производные первого столбца матрицы $\overset{0}{\mathbf{B}}_{ik}$ (572):

$$\frac{\partial Y_{ik}}{\partial X_{ok}}\approx\frac{Y_{ik}^{(1)}-Y_{ik}}{\delta X_{ok}};\qquad \frac{\partial Z_{ik}}{\partial X_{ok}}\approx\frac{Z_{ik}^{(1)}-Z_{ik}}{\delta X_{ok}}. \tag{578}$$

4. Далее будем варьировать элемент Y_{ok} вектора начальных условий. Интегрируя систему (575) аналогичным образом с варьированным вектором начальных условий

$$\overline{\mathbf{X}}_{ok}^{(2)}=(X_{ok}, Y_{ok}+\delta Y_{ok}, Z_{ok}, \dot{X}_{ok}, \dot{Y}_{ok}, \dot{Z}_{ok}), \tag{579}$$

получим варьированный вектор координат и составляющих скорости

$$\overline{\mathbf{X}}_{ik}^{(2)}=(X_{ik}^{(2)}, Y_{ik}^{(3)}, Z_{ik}^{(2)}, \dot{X}_{ik}^{(2)}, \dot{Y}_{ik}^{(2)}, \dot{Z}_{ik}^{(2)}). \tag{580}$$

5. Определим элементы второго столбца матрицы. Они будут следующими:

$$\frac{\partial X_{ik}}{\partial Y_{ok}} \approx \frac{X_{ik}^{(2)} - X_{ik}}{\delta Y_{ok}};$$

$$\frac{\partial Y_{ik}}{\partial Y_{ok}} \approx \frac{Y_{ik}^{(2)} - Y_{ik}}{\delta Y_{ok}}; \qquad (581)$$

$$\frac{\partial Z_{ik}}{\partial Y_{ok}} \approx \frac{Z_{ik}^{(2)} - Z_{ik}}{\partial Z_{ok}}.$$

6. Продолжая далее варьировать значения остальных элементов вектора начальных условий, вычислим все элементы матрицы $\overset{0}{\mathbf{B}}_{ik}$.

Таким образом, чтобы вычислить все элементы матрицы $\overset{0}{\mathbf{B}}_{ik}$, необходимо семь раз выполнить интегрирование уравнений движения: один раз для получения номинального значения вектора начальных условий $\overline{\mathbf{X}}_{ik}$ и шесть раз для определения его шести варьированных значений. Несмотря на простоту изложенного метода, он требует больших затрат машинного времени.

Исследования показывают, что при тщательном подборе малых приращений начальных условий δX_{ok}, δY_{ok}, ... , $\delta \dot{Z}_{ok}$ погрешности расчета производных рассмотренным методом практически не будут сказываться на точности вычисления коэффициентов уравнений поправок при дифференциальном уточнении орбит и уравнивании космической фототриангуляции.

Глава VIII
ОБРАБОТКА ФОТОГРАФИЧЕСКИХ НАБЛЮДЕНИЙ ИСЗ

§ 41. ОСНОВНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ФОТОГРАФИЧЕСКИХ НАБЛЮДЕНИЙ ИСЗ

В практике астрономических наблюдений уже более века успешно применяются методы фотографической астрометрии для определения относительных положений и собственных движений звезд.

Быстрое движение ИСЗ, которые в среднем имеют видимую скорость порядка 1 °/с, поставило астрономов и геодезистов, ведущих наблюдения ИСЗ в геодезических целях, перед необходимостью регистрации времени с точностью до тысячных долей се-

кунды. Кроме того, быстрое движение ИСЗ создает еще одну дополнительную трудность — эффективное время экспозиции ИСЗ очень мало и для большинства ИСЗ составляет доли секунды. При этом след слабых по яркости спутников просто не регистрируется на фотоматериале, и возникает необходимость перемещения телескопа или его кассеты вслед за ИСЗ. Большую роль играет светосила оптической системы фотографической камеры, наиболее мощные современные спутниковые камеры позволяют выполнить фотографирование спутников до седьмой звездной величины без отслеживания.

Отслеживание увеличивает яркость ИСЗ на четыре-пять звездных величин.

При построении сетей космической триангуляции необходимым условием является синхронность наблюдений ИСЗ с двух или более станций (ошибка синхронизации наблюдений не должна превышать несколько миллисекунд).

Выполнить такие наблюдения со станций, разделенных расстояниями в тысячи километров, очень трудно. Для этого пришлось бы иметь централизованное управление и точно знать запаздывания в работе аппаратуры на каждой станции, а также учитывать целый ряд других тонких эффектов.

В Астрономическом совете Академии наук СССР разработана специальная методика фотографических наблюдений, которая позволяет избежать указанные трудности и обеспечить необходимую точность результатов.

Все станции наблюдений ИСЗ, обеспеченные однотипной фотографической аппаратурой и системами регистрации времени с точностью до двух миллисекунд, выполняют фотографические наблюдения по одной программе: в определенные интервалы времени на один кадр делают серию коротких экспозиций; время каждой экспозиции фиксируют.

При этом след спутника на негативе представляет собой цепочку точек. Точно так же получают и изображения звезд, служащих для определения видимых топоцентрических инерциальных координат спутника.

Моменты всех экспозиций редуцируют к системе времени, единого для станций, участвующих в наблюдениях. Для каждой группы негативов, полученных на разных станциях за один промежуток времени, выбирают один общий момент синхронизации. Негативы измеряют на координатно-измерительных машинах, на каждом негативе определяют не менее десяти точек следа спутника и не менее шести опорных звезд.

Используя измеренные координаты точек следа ИСЗ, интерполяцией по способу наименьших квадратов определяют вид зависимостей координат от времени: $x=x(t)$; $y=y(t)$. Подставив в эти уравнения момент синхронизации t_0, получают координаты на негативе x_0 и y_0, соответствующие моменту t_0, а из обработки

астронегатива определяют топоцентрические координаты α_0 и δ_0 спутника в тот же момент времени.

Таким образом, вместо физической синхронизации наблюдений используют математическую, которой добиваются с помощью интерполяции положений ИСЗ, полученных в разные моменты единой шкалы времени.

Основная масса фотографических наблюдений ИСЗ на станциях Астрономического совета АН СССР была выполнена с использованием астрономической фотографической установки (АФУ). Камера АФУ сконструирована в Латвийском университете К. Лапушкой и М. Абеле.

Фокусное расстояние камеры АФУ — 736 мм; использован семилинзовый объектив «Уран-16» со светосилой 1 : 3,5; поле снимка составляет $10\times14°$, при этом длинная сторона направлена по следу спутника. При фотографировании используют пленку шириной 190 мм, в кассете содержится 29 м пленки (110 негативов), перемотка пленки выполняется автоматически. Центральный затвор медленного действия перекрывает свет на время перемотки пленки. Камера имеет четырехосную монтировку, что дает возможность отслеживать спутник по дуге малого круга. Камера АФУ снабжена гид-телескопом с увеличением в восемь или двадцать раз при поле зрения 8 и 3° соответственно. Гид используется для контроля наведения фотокамеры на спутник, а также точности согласования скорости компенсации и спутника.

Камера АФУ установлена на специальной экваториальной платформе, которая отслеживает суточное вращение в течение 2—3 мин. Угол поворота платформы за это время составляет 30—45′, а такой поворот не влияет на устойчивость камеры. Перед производством следующей экспозиции платформа возвращается в исходное положение.

В фокальной плоскости камеры установлен механизм компенсации сдвига изображения спутника, который представляет собой металлическую раму с закрепленным в ней плоскопараллельным стеклом. Наиболее удаленная от объектива поверхность стекла является фокальной плоскостью, к ней при помощи металлической пластины прижимается пленка.

Механизм компенсации обеспечивает равномерное и прямолинейное движение пленки, зажатой между стеклом и прижимным приспособлением в процессе получения снимка с изображением слабого спутника, и позволяет останавливать пленку для получения изображений слабых звезд. При этом длительность и число остановок задает оператор с пульта камеры.

Фотографирование слабых спутников заключается в следующем.

Сначала выполняется экспозиция опорных звезд. В это время работает экваториальная платформа, открыт центральный затвор, а камера и механизм компенсации с пленкой неподвижны. Время экспозиции звезд не зависит от скорости спутника. После того как

экспонирование звезд закончено, начинает работать механизм компенсации движения спутника. Происходит его движение в направлении, совпадающем с движением изображения спутника в фокальной плоскости, со скоростью, равной скорости изображения спутника. Изображением спутника, таким образом, является точка. Длительность компенсации может составлять 3; 6 и 12 мм пленки.

После прохождения этого отрезка механизм компенсации останавливается, и снова выполняется экспозиция звезд. Этот процесс многократно повторяется.

Звезды и спутник получаются на фотоматериале в виде прямолинейной цепочки точек. Количество точечных изображений звезд всегда на одну больше, чем изображений спутника, так как каждый цикл заканчивается экспозицией звезд.

При фотографировании ярких спутников до третьей звездной величины работают экваториальная платформа и обтюраторный затвор, который представляет собой часть цилиндра со щелью. Цилиндр совершает один оборот за секунду, его вращение синхронизировано с импульсами секунд кварцевых часов и контролируется кварцевыми часами. Обтюраторный затвор позволяет делать разрывы в следе спутника. Время фотографирования впечатывается на снимок.

Камера АФУ может быть использована и для фотографирования активных спутников на расстояниях до 3500 км при соответствующей мощности вспышки. При этом также работает экваториальная платформа, но центральный затвор открывается по команде наблюдателя. Звезды и изображения вспышек получаются в виде точек. Открывая затвор дважды, получают изображения звезд в виде двух точек, что позволяет отличать их от изображений вспышек.

Для камеры АФУ разработан новый зеркально-линзовый объектив «Сатурн-24» с улучшенными астрометрическими параметрами и более мощный гид-телескоп с диаметром 240 мм, полем зрения 2° и увеличением 48^{x}. Этот вариант камеры получил название АФУ-75. Камера фотографирует спутники до десятой звездной величины, отслеживает низкие и высокие объекты и дает точность определения направлений 1—2″.

Конструкция и основные элементы устройства камер других типов, используемых для фотографических наблюдений спутников, изучаются в курсе «Космическая геодезия».

При обработке спутниковых астронегативов, выполненных камерами с малым полем зрения (менее 5°), применяют *астрометрический* метод. Для фотографирования используют фотопленку. Необходимое число опорных звезд не более двадцати. При небольшом поле зрения и достаточно хорошо известном положении оптического центра нет необходимости в раздельном определении элементов внешнего и внутреннего ориентирования камеры,

а небольшое поле зрения упрощает учет дисторсии и других аберраций. Астрометрический метод не требует большого числа опорных звезд, а вычисления для определения спутникоцентрических направлений значительно проще, чем при использовании фотограмметрического метода, предусматривающего совместное определение элементов внешнего и внутреннего ориентирования, дисторсии и других деформаций.

§ 42. ЗАКОН ТАНГЕНСА. ИДЕАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ

Изображение участка небесной сферы на пленке, построенное объективом камеры, является центральной проекцией фотографируемой области из второй главной точки объектива на плоскость пластинки (рис. 27). При этом большой круг небесной сферы изображается прямой линией.

Точка O — вторая главная точка объектива, которую будем считать совпадающей с первой главной точкой. Построим небесную сферу с центром в точке O и радиусом, равным фокусному расстоянию камеры. Основание O_1 перпендикуляра OO_1, опущенного из второй главной точки на плоскость негатива, называется в астрометрии оптическим центром пластинки (снимка). Пусть звезда находится в точке S небесной сферы, тогда ее изображение на пластинке будет построено объективом в точке S'.

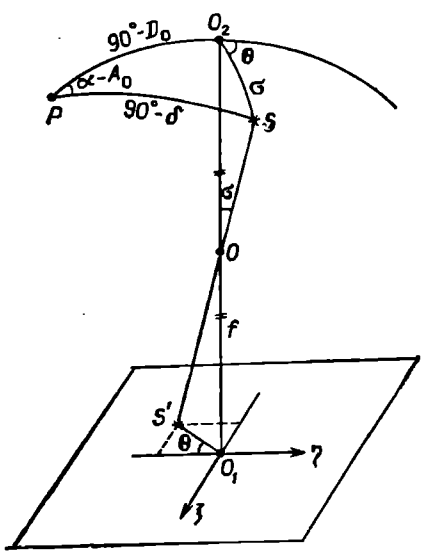

Рис. 27. Проекция участка небесной сферы на плоскость снимка

Точка O_2 на небесной сфере имеет координаты $\alpha = A_0$ и $\delta_0 = D_0$ и проецируется в оптический центр снимка. Расстояние изображения звезды от оптического центра можно определить по формуле

$$l = f \operatorname{tg} \sigma, \qquad (582)$$

где σ — угловое расстояние звезды от точки O_2 на небесной сфере. Это соотношение называется законом тангенса. В реальных оптических системах закон тангенса выполняется лишь приближенно. Искажения объектива, а также влияние дифференциальной рефракции и дифференциальной аберрации совместно с атмосферной дисперсией обусловливают нарушение закона тан-

генса в поле изображений. Из всех искажений, вносимых объективом, наиболее существенной является дисторсия, влияющая на центральное проектирование. С учетом влияния дисторсии закон тангенса примет вид

$$l = f \operatorname{tg} \sigma + \varphi(\sigma), \tag{583}$$

где $\varphi(\sigma)$ — дисторсия.

Дисторсию представляют обычно в виде ряда

$$\varphi(\sigma) = K_1 \operatorname{tg}^3\sigma + K_2 \operatorname{tg}^5\sigma + \ldots, \tag{584}$$

где коэффициенты K_1 и K_2 необходимо определить из исследований объектива.

Введем систему прямоугольных координат ξ, η в плоскости снимка, которые называют идеальными или стандартными координатами. Ось η является проекцией круга склонений точки O_2, а ось ξ перпендикулярна к η в точке O_2.

Установим связь между прямыми восхождениями α и склонениями δ звезд и их идеальными координатами ξ и η.

Идеальные координаты изображения звезды получим в виде

$$\xi = f \operatorname{tg} \sigma \sin \theta; \quad \eta = f \operatorname{tg} \sigma \cos \theta, \tag{585}$$

где θ — позиционный угол звезды относительно точки $O_2(A_0, D_0)$.

Теперь напишем основные формулы сферической тригонометрии для сферического треугольника PO_2S:

$$\begin{aligned} &\cos \sigma = \sin \delta \sin D_0 + \cos \delta \cos D_0 \cos(\alpha - A_0); \\ &\sin \sigma \sin \theta = \cos \delta \sin(\alpha - A_0); \\ &\sin \sigma \cos \theta = \sin \delta \cos D_0 - \cos \delta \sin D_0 \cos(\alpha - A_0). \end{aligned} \tag{586}$$

Разделим вторую и третью формулы (586) на первую и результат подставим в выражения (585).

Тогда получим:

$$\begin{aligned} \xi &= f \frac{\cos \delta \sin(\alpha - A_0)}{\sin \delta \sin D_0 + \cos \delta \cos D_0 \cos(\alpha - A_0)}; \\ \eta &= f \frac{\sin \delta \cos D_0 - \cos \delta \sin D_0 \cos(\alpha - A_0)}{\sin \delta \sin D_0 + \cos \delta \cos D_0 \cos(\alpha - A_0)}. \end{aligned} \tag{587}$$

Формулы (587) и устанавливают связь инерциальных координат светила α и δ и идеальных координат ξ и η его изображения на снимке.

Формулы обратного перехода от идеальных координат ξ и η к инерциальным α и δ получают в результате элементарных преобразований формул (587). Они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \alpha &= \operatorname{arctg}\left(\frac{\xi}{f \cos D - \eta \sin D}\right) + A_0; \\ \delta &= \operatorname{arctg}\left[\left(\frac{\eta \cos D + f \sin D}{f \cos D - \eta \sin D}\right) \cos(\alpha - A_0)\right]. \end{aligned} \tag{588}$$

§ 43. ГОМОГРАФИЧЕСКОЕ (КОЛЛИНЕАРНОЕ) И АФФИННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Плоским полем называется совокупность всех точек и прямых, лежащих в одной плоскости. Рассмотрим два плоских поля (x, y) и (ξ, η), связанные дробно-линейным соотношением:

$$\xi = \frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}; \quad \eta = \frac{dx+ey+f}{a'x+b'y+c'}. \tag{589}$$

Такое соответствие между двумя плоскими полями называется гомографическим или коллинеарным.

Без ущерба для общности результатов можно коэффициент c' принять равным единице, что, очевидно, приведет к упрощению дробей в правых частях выражений (589). Таким образом, для определения гомографического или коллинеарного преобразования достаточно восьми элементов.

Гомографическое преобразование обладает весьма важным свойством — оно преобразует прямую одного поля в прямую другого поля.

Возьмем в поле (ξ, η) прямую

$$m\xi+n\eta+p=0. \tag{590}$$

Если подставить в это уравнение соотношения (589), то получим

$$(am+dn+a'p)x+(bm+cn+b'p)y+(cm+fn+c'p)=0. \tag{591}$$

Это уравнение прямой, следовательно, прямым в поле (ξ, η) соответствуют также прямые в поле (x, y).

Уравнением семейства параллельных прямых в поле (ξ, η) является уравнение (590), при этом m и n — постоянные величины, переменным параметром будет только величина p.

Уравнение (591) можно представить в следующем виде:

$$[(am+dn)x+(bm+cn)y+(cm+fn)]+p(a'x+b'y+c')=0. \tag{592}$$

Уравнение (592) при постоянных m и n и переменном p является уравнением пучка прямых.

Следовательно, параллельные линии одного поля изображаются в другом поле пучком прямых. Центр пучка прямых называется точкой схода и является изображением несобственной точки прямой (590), имеющей направление, определяемое коэффициентами m и n.

Для определения точки схода необходимо иметь две прямые из пучка (592), пересечение которых дает точку схода.

Наиболее удобно при выборе прямых, определяющих точку схода, установить сначала параметр пучка p равным нулю, а затем равным бесконечности.

Тогда решение системы уравнений

$$(am+dn)x+(bm+cn)y+(cm+fn)=0;$$
$$a'x+b'y+c=0 \qquad (593)$$

относительно x, y даст положение точки схода в поле (x, y). Конечно, можно считать, что оба поля (x, y) и (ξ, η) находятся в одной плоскости, так как это никак не влияет на общность выводов, но важно для дальнейших приложений. Кроме того, можно поменять роли рассматриваемых полей и взять семейство параллельных прямых в первом поле.

Наиболее интересным является следующий частный случай гомографического преобразования.

Поставим условие, чтобы параллельные прямые, заданные в одном из полей, изображались также параллельными в другом.

Уравнение (590) при постоянных m и n и переменном p является уравнением параллельных прямых второго поля. Для того чтобы уравнение (589) тоже отображало семейство параллельных прямых в первом поле, необходимо, чтобы коэффициенты при x и y были постоянными, а это возможно тогда и только тогда, когда они не зависят от переменного p, т. е. $a'=b'=0$. Тогда гомографическое преобразование (589) при $c'=1$ вырождается в преобразование

$$\xi=ax+by+c;\ \eta=dx+ey+f, \qquad (594)$$

которое называется аффинным.

Аффинным преобразованием является взаимно однозначное точечное преобразование плоскости или пространства на себя, при котором трем точкам, лежащим на одной прямой, соответствуют три точки, также лежащие на одной прямой. При аффинном преобразовании прямые переходят в прямые, пересекающиеся прямые — в пересекающиеся; параллельные — в параллельные, скрещивающиеся — в скрещивающиеся.

§ 44. СВЯЗЬ ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫХ И ИДЕАЛЬНЫХ КООРДИНАТ

Координаты изображений звезд и ИСЗ измеряют на прецизионных координатно-измерительных машинах с высокой степенью точности (ошибки не более 1—2 мкм). Однако целый ряд систематических ошибок может значительно искажать измерения.

Шкалы измерительного прибора могут быть калиброваны в разных масштабах и не быть строго перпендикулярными; сильно сказываются также и дефекты изображений. Даже в очень тщательно отъюстированных оптических системах нельзя полностью устранить кому и астигматизм, которые приводят к появлению неоднородностей изображения, зависящих от его положения на снимке. Дефекты юстировки неизбежно вызывают дисторсию. На-

конец, существуют искажения, вызванные турбулентностью атмосферы и ошибкой гидирования при отслеживании звезд и ИСЗ.

Точность измерения координат центров таких неточечных изображений зависит от методики измерений. В измерительных машинах изображение биссектируется визуально с помощью нитей, укрепленных в фокальной плоскости микроскопа. Если измерению подлежат достаточно круглые изображения, то установление центра кружка выполняет опытный наблюдатель уверенно, однако возможны относительные смещения в зависимости от диаметра кружка. Если же изображение несимметрично, например при искажениях комой, то точку биссектирования выбирают произвольно. В современных автоматических приборах определяется центр изображения, который получается интегрированием плотности почернения в области изображения. Этот метод дает хорошие результаты, если в процессе интегрирования правильно установлены веса соответствующих плотностей.

При математической обработке все эти факторы трудно выразить в виде аналитических зависимостей.

Наиболее общей формой связи между инструментальными и идеальными координатами являются выражения идеальных координат ξ и η в виде полиномов по степеням x и y:

$$\xi = x + ax + by + c + a'x^2 + b'y^2 + c'xy + \ldots;$$
$$\eta = y + dx + ey + f + d'x^2 + e'y^2 + f'xy + \ldots . \qquad (595)$$

Применение таких полиномов дает возможность вычислить по способу наименьших квадратов коэффициенты a, b, $c, \ldots$, d, e, f, $\ldots$, которые называют **постоянными пластинки** (снимка). Эти постоянные не имеют какого-нибудь геометрического смысла, но позволяют максимально учесть искажения линейного и нелинейного характера. Конечно, для построения полиномов высоких степеней необходимо иметь большое число опорных звезд в поле изображений. При этом значительно возрастают сложность и объем вычислений. Поэтому на практике почти никогда не используют полиномы выше третьей степени.

При ограниченных полях изображений порядка 1—2° расстояние от оптического центра становится несущественным.

Требования к точности определения положения самого оптического центра (A_0, D_0) также снижаются. Так, в поле диаметром в 1° смещение оптического центра до 1′ приводит к ошибкам в инерциальных координатах не более чем 0,005″.

Поэтому в формулах (587), (588) можно принять, что координаты оптического центра A_0 и D_0 равны среднему арифметическому из координат опорных звезд:

$$A_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}{n}; \quad D_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta_i}{n}. \qquad (596)$$

При небольших полях изображений чаще всего полагают, что связь идеальных и инструментальных координат задана аффинным преобразованием

$$\xi - x = ax + by + c;$$
$$\eta - y = dx + ey + f. \qquad (597)$$

Пусть, например, θ_x и θ_y — углы между направлениями осей X и Y координатно-измерительного устройства и осей ξ и η идеальной системы координат.

Будем полагать, что шкалы разномасштабны, а F_x и F_y — значения фокусного расстояния, выраженные в единицах шкал X и Y. Тогда аффинное преобразование будет иметь вид

$$\xi = F_x^{-1}(X\cos\theta_x + Y\sin\theta_x) + c;$$
$$\eta = F_y^{-1}(-X\sin\theta_x + Y\cos\theta_y) + f. \qquad (598)$$

Пусть F_0 — приближенное значение фокусного расстояния, выразим x и y в безразмерных единицах. Получим $x = \frac{X}{F_y}$; $y = \frac{Y}{F_0}$. Тогда уравнение (598) можно преобразовать к виду (597), где

$$a = \frac{F_0}{F_x}\cos\theta_x - 1; \quad b = \frac{F_0}{F_y}\sin\theta_x,$$
$$d = -\frac{F_0}{F_y}\sin\theta_y; \quad e = \frac{F_0}{F_y}\cos\theta_y - 1. \qquad (599)$$

Постоянные c и f — нуль-пункты шкал, зависящие от начальной установки координатных линеек.

Имеется ряд внешних причин, влияние которых также необходимо учитывать. К их числу относятся дифференциальные рефракция и аберрация, а также дисперсия атмосферы.

Действие рефракции заключается в смещении изображений звезд в направлении к зениту. Так как рефракция для участка звездного неба в пределах пластинки не одинакова, т. е. зависит от зенитного расстояния, то изображения звезд, имеющих отличные от центральных зенитные расстояния, смещены относительно центральных звезд. Это явление называется дифференциальной рефракцией. Дифференциальная годичная аберрация, так же как и дифференциальная рефракция, смещает изображение звезд относительно центра пластинки. Атмосферная дисперсия вызывает вытягивание изображения в спектр, особенно при больших зенитных расстояниях. Этот эффект является следствием зависимости коэффициента рефракции от длины световой волны.

После измерения изображений опорных звезд и ИСЗ получают инструментальные координаты x_i, y_i опорных звезд и координаты x, y ИСЗ.

Наиболее распространенным из астрометрических методов является способ Тернера.

Две системы уравнений Тернера для опорных звезд будут следующими:

$$\begin{aligned} &ax_i + by_i + c_i = l_{x_i} + v_{x_i};\\ &dx_i + ey_i + f_i = l_{y_i} + v_{y_i} (i = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned} \tag{600}$$

где n — число опорных звезд; $l_{x_i} = \xi_i - x_i$, $l_{y_i} = \eta_i - y_i$ — свободные члены; v_{x_i} и v_{y_i} — поправки в измеренные координаты звезд.

При больших полях изображений необходимо в уравнения Тернера (600) ввести члены второго порядка для учета дифференциальной рефракции и третьего порядка — дисторсии.

Можно, наоборот, ограничиться лишь линейными членами относительно x и y, т. е. использовать уравнения (600), а измеренные координаты исправить поправками за факторы, действующие нелинейно.

Так, в случае значительной дисторсии она предварительно определяется, а затем в измеренные координаты вводятся поправки:

$$\begin{aligned} \Delta x_\partial &= -c(x - x_0)[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2];\\ \Delta y_\partial &= -c(y - y_0)[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2], \end{aligned} \tag{601}$$

где x, y — измеренные координаты; x_0, y_0 — измеренные координаты оптического центра; $c = \nu_1 f^{-3}$.

Эти поправки получаются из соотношения

$$l = f \operatorname{tg}\sigma + K \operatorname{tg}^3\sigma = r + cr^3 \tag{602}$$

путем разложения cr^3 по осям x и y.

Введя условия $[v_{x_i}^2] = \min$ и $[v_{y_i}^2] = \min$, на основании уравнений (600) получим две системы нормальных уравнений с неизвестными a, b, c и d, e, f;

$$\mathbf{N}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_1^n x l_x \\ \sum_1^n y l_x \\ \sum_1^n l_x \end{bmatrix} = \bar{\mathrm{L}}_x;$$

$$\mathbf{N}\begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_1^n x l_y \\ \sum_1^n y l_y \\ \sum_1^n l_y \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{L}}_y \tag{603}$$

с общей для обеих систем матрицей нормальных уравнений **N**

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \sum_1^n x^2 & \sum_1^n xy & \sum_1^n x \\ \sum_1^n xy & \sum_1^n y^2 & \sum_1^n y \\ \sum_1^n x & \sum_1^n y & n \end{bmatrix}, \tag{604}$$

где n — число опорных звезд, принятых в обработку. Обратная матрица нормальных уравнений дает значения неизвестных, т. е.

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \mathbf{N}^{-1}\bar{\mathbf{L}}_x; \quad \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \mathbf{N}^{-1}\bar{L}_y. \tag{605}$$

Подставив значения постоянных a, b, c и d, e, f в уравнения поправок (600), вычислим поправки измеренных координат звезд v_{x_i} и v_{y_i} и ошибки единицы веса μ_x и μ_y:

$$\mu_x = \sqrt{\frac{\sum_1^n v_{x_i}^2}{n-3}}; \quad \mu_y = \sqrt{\frac{\sum_1^n v_{y_i}^2}{n-3}}. \tag{606}$$

Средние квадратические ошибки постоянных пластинки получим по формулам

$$\begin{aligned} m_a &= \mu_x\sqrt{q_{11}}; \quad m_b = \mu_x\sqrt{q_{22}}; \quad m_c = \mu_x\sqrt{q_{33}}; \\ m_d &= \mu_y\sqrt{q_{12}}; \quad m_e = \mu_y\sqrt{q_{22}}; \quad m_f = \mu_y\sqrt{q_{33}}, \end{aligned} \tag{607}$$

где q_{11}, q_{22} и q_{33} — диагональные элементы обратной матрицы нормальных уравнений $\mathbf{N}^{-1}$.

Зная постоянные пластинки, можно вычислить идеальные координаты ИСЗ

$$\xi_{\text{ИСЗ}} = x_{\text{ИСЗ}} + ax_{\text{ИСЗ}} + by_{\text{ИСЗ}} + c;$$
$$\eta_{\text{ИСЗ}} = y_{\text{ИСЗ}} + dx_{\text{ИСЗ}} + ey_{\text{ИСЗ}} + f \tag{608}$$

и далее по формулам (588) топоцентрические экваториальные координаты ИСЗ.

§ 45. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТОПОЦЕНТРИЧЕСКОГО НАПРАВЛЕНИЯ НА ИСЗ

Рассмотрим последовательность обработки астронегатива при определении топоцентрического направления $\bar{r}^0_{ij}$ на ИСЗ в инерциальной системе координат

$$\bar{r}^0_{ij} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{ij}\cos\delta_{ij} \\ \sin\alpha_{ij}\cos\delta_{ij} \\ \sin\delta_{ij} \end{bmatrix}. \tag{609}$$

1. Для каждого астронегатива, используя все измеренные координаты x_i, y_i изображений ИСЗ, аппроксимируют след ИСЗ полиномами третьей степени:

$$x_i = a_0 + a_1T_i + a_2T_i^2 + a_3T_i^3;$$
$$y_i = b_0 + b_1T_i + b_2T_i^2 + b_3T_i^3, \tag{610}$$

коэффициенты которых определяют по способу наименьших квадратов. Подставив в эти полиномы некоторый синхронный момент T_0, получают координаты x_c и y_c, соответствующие этому моменту.

2. Инерциальные координаты опорных звезд, заданные на эпоху каталога T_0, приводят на видимые места, для чего необходимо учесть собственные движения звезд μ_α и μ_δ за промежуток времени $(T_c - T_0)$, прецессию за этот же промежуток, нутацию, годичную аберрацию и рефракцию.

Для учета рефракции вычисляют зенитное расстояние звезды по формуле

$$\cos z = \sin\alpha\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos(s-\alpha), \tag{611}$$

где φ — широта пункта; s — местное звездное время в момент фотографирования. Затем определяют поправку за рефракцию Δz_R в зенитное расстояние звезды, которая равна

$$\Delta z_R = 58{,}294'' \operatorname{tg} z - 0{,}0668 \operatorname{tg}^2 z.$$

Далее вычисляют поправки за рефракцию в прямое восхождение α и склонение δ звезды

$$\Delta\alpha_R = \Delta z_R \sec\delta \sin q;$$
$$\Delta\delta_R = \Delta z_R \cos q, \tag{612}$$

где q — параллактический угол звезды, определяемый из решения параллактического треугольника как

$$\sin q = \frac{\sin(s-\alpha)\cos\varphi}{\sin z}; \quad \cos q = \frac{\sin\varphi - \sin\delta\cos z}{\cos\delta\sin z}. \tag{613}$$

Поправки за годичную аберрацию в экваториальные координаты звезд вычисляют по формулам

$$\Delta\alpha_{аб} = \frac{20{,}47'' \sin\alpha\sin\lambda_\odot + 18{,}87'' \cos\alpha\cos\lambda_\odot}{\cos\delta};$$
$$\Delta\delta_{аб} = 20{,}47'' \sin\delta\cos\alpha\sin\lambda_\odot + 18{,}87'' \cos\lambda_\odot(0{,}433\,666\cos\delta - \tag{614}$$
$$- \sin\delta\sin\alpha),$$

где $\lambda_\odot$ — геоцентрическая долгота Солнца.

3. По видимым координатам звезд вычисляют их идеальные координаты ξ, η и далее по способу Тернера определяют постоянные пластинки a, b, c и d, e, f и идеальные координаты спутника $\xi_{ИСЗ}$ и $\eta_{ИСЗ}$ и по ним экваториальные топоцентрические координаты α_{ij} и δ_{ij} по формулам (588).

4. Полученные по способу Тернера топоцентрические координаты α_{ij} и δ_{ij} необходимо исправить за рефракцию и аберрационное время.

Для исключения рефракции в направление на ИСЗ поправку следует вводить со знаком, противоположным знаку рефракционной поправки, введенной в координаты звезд. Однако рефракция действует на спутник несколько иначе, чем на звезды, так как спутник находится на конечном и сравнительно небольшом расстоянии.

Поправка в зенитное расстояние ИСЗ состоит из двух частей: поправки за собственно астрономическую рефракцию и поправки за рефракционный параллакс, поскольку на спутникоцентрическое направление действует не вся атмосферная рефракция, а лишь ее часть, так как спутник находится в пределах атмосферы.

Таким образом, поправка $\Delta z_{R_{ИСЗ}}$ в зенитное расстояние спутника представляет собой сумму двух поправок, т. е.

$$\Delta z_{R_{ИСЗ}} = \Delta z_R - \delta z_R, \tag{615}$$

где δz_R — рефракционный параллакс.

Рефракционный параллакс δz_R зависит от изменения показателя преломления воздуха с высотой, что ведет к изменению радиуса кривизны рефракционной кривой.

Значение рефракционного параллакса определяют по формуле

$$\delta z_R = 435{,}00'' \frac{\operatorname{tg} z \sec z}{r} C_P C_t, \tag{616}$$

где r — расстояние от станции до ИСЗ в километрах; $C_P = 1 + 0{,}001\,312\,5\,(P - 760)$, $C_t = 1 - 0{,}0037\,t$ — поправочные коэффициенты, которые учитывают действительное состояние атмосферы относительно нормального (давление P и температура t от нормальных $P = 760$ мм; $t = 0\,^\circ$C). Поправка δz_P всегда отрицательна.

Учет аберрации в топоцентрических координатах ИСЗ выполняется на основании следующих соображений.

Прежде всего, поскольку спутник вращается вместе с Землей, направления на него не искажаются годичной аберрацией и, следовательно, координаты спутника, вычисленные с видимыми координатами звезд, являются истинными координатами, искаженными только рефракцией. Однако необходимо еще учесть движение ИСЗ относительно наблюдателя с помощью введения поправок либо в координаты ИСЗ, либо в моменты фотографирования, из которых надо вычесть величину τ. Величина τ называется аберрационным временем, т. е. временем прохождения световой волны от спутника до станции.

Следовательно, для получения направления, соответствующего положениям спутника и пункта в один момент, необходимо ввести поправки в топоцентрические координаты спутника за аберрационное время:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_{аб} &= \dot{\alpha}\frac{r}{c} = \dot{\alpha}\tau; \\ \Delta\delta_{аб} &= \dot{\delta}\frac{r}{c} = \dot{\delta}\tau, \end{aligned} \tag{617}$$

Таблица 27

Объект	x, мм	y, мм	α	δ
ИСЗ	10,7163	— 6,2421	—	—
Звезда 1	— 2,5138	6,1793	$10^h15^m19{,}042^s$	46° 11′ 00,39″
2	—15,2623	4,2418	10 12 52,974	45 16 27,63
3	20,8184	—15,2421	10 08 49,756	48 23 20,94
4	—35,2719	—16,2055	10 01 56,547	44 11 26,87
5	47,1859	24,2116	10 30 22,265	49 25 26,08
6	—53,2143	42,2057	10 23 36,826	41 35 36,70
7	—20,1817	—36,9028	9 54 39,740	45 42 32,17
8	50,2130	—22,7114	10 09 08,427	50 44 32,31
9	—18,2078	+56,2093	10 34 01,324	43 48 19,70

Таблица 28

Номер звезды	ξ, мм	η, мм	l_x, мм	l_y, мм
1	1,747 77	0,486 18	4,262 14	— 5,692 06
2	— 3,725 76	—11,185 49	11,535 43	—15,428 60
3	—12,170 11	28,946 23	—32,987 87	44,187 45
4	—29,012 27	—24,567 08	6,258 79	— 8,360 97
5	33,151 60	43,028 51	—14,035 30	18,817 37
6	21,886 18	—58,311 84	75,098 35	—100,517 99
7	—44,584 16	— 4,227 27	—24,401 94	32,674 63
8	—10,991 18	59,273 30	—61,202 25	81,984 68
9	45,238 65	—28,746 26	63,446 80	—84,955 47

где c=299 792 км/с — скорость света; r — расстояние от станции до ИСЗ; $\dot{\alpha}$ и $\dot{\delta}$ — скорости ИСЗ по топоцентрическому прямому восхождению и склонению.

Скорости $\dot{\alpha}$ и $\dot{\delta}$ легко получить по снимку, на котором имеются хотя бы два изображения ИСЗ.

Пример 19. Даны измеренные на негативе при помощи прибора КИМ-3 координаты x, y ИСЗ и опорных звезд, а также приведенные на видимые места инерциальные координаты α и δ опорных звезд (табл. 27). Снимок получен камерой АФУ с фокусным расстоянием F=736,0127 мм.

Решение.

1. Вычислим идеальные координаты звезд ξ, η и свободные члены уравнений поправок l_x и l_y (табл. 28) по формулам:

$$\xi = F\,\frac{\cos\delta\sin(\alpha - A_0)}{\sin\delta\sin D_0 + \cos\delta\cos D_0\cos(\alpha - A_0)};$$

$$\eta = F\,\frac{\sin\delta\cos D_0 - \cos\delta\sin D_0\cos(\alpha - A_0)}{\sin\delta\sin D_0 + \cos\delta\cos D_0\cos(\alpha - A_0)};$$

$$l_x = \xi - x;\quad l_y = \eta - y.$$

Координаты проекции оптического центра A_0 и D_0 на небесную сферу получаем как средние арифметические соответствующих координат опорных звезд, т. е. $A_0 = 10^h14^m31{,}878^s$; $D_0 = 46°08'44{,}75''$.

2. Составим матрицу нормальных уравнений $\mathbf{N}$ и векторы свободных членов $\bar{\mathbf{L}}_x$ и $\bar{\mathbf{L}}_y$:

$$\bar{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} [x^2] & [xy] & [x] \\ [yx] & [y^2] & [y] \\ [x] & [y] & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\,235{,}21 & -2\,348{,}58 & -26{,}43 \\ -2\,348{,}58 & 7\,955{,}75 & 41{,}98 \\ -26{,}43 & 41{,}98 & 9{,}00 \end{bmatrix};$$

$$\bar{\mathbf{L}}_x = \begin{bmatrix} [xl_x] \\ [y'_x] \\ [l_x] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9\,488{,}76 \\ 9\,163{,}19 \\ 27{,}974 \end{bmatrix};\quad \bar{\mathbf{L}}_y = \begin{bmatrix} [yl_y] \\ [y'_y] \\ [l_y] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12\,705{,}63 \\ -12\,268{,}53 \\ -37{,}298 \end{bmatrix}.$$

Таблица 29

Номер звезды	v_x	v_y	Номер звезды	v_x	v_y
1	—0,004	+0,009	5	—0,007	+0,009
2	—0,007	+0,009	6	+0,001	—0,023
3	+0,002	—0,001	7	+0,009	+0,003
4	—0,005	+0,002	8	+0,008	—0,025
			9	+0,011	+0,005

3. Получим обратную матрицу $\mathbf{N}^{-1}$ иормальных уравиений

$$\mathbf{N}^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}050\,48\cdot10^{-4} & 3{,}012\,44\cdot10^{-5} & 1{,}679\,78\cdot10^{-4} \\ 3{,}012\,44\cdot10^{-5} & 1{,}375\,06\cdot10^{-4} & -5{,}529\,23\cdot10^{-4} \\ 1{,}679\,78\cdot10^{-4} & -5{,}529\,23\cdot10^{-4} & 1{,}141\,83\cdot10^{-1} \end{bmatrix},$$

4. Вычислим постоянные пластинки a, b, c и d, e, f, используя соотношение:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \mathbf{N}^{-1}\overline{\mathbf{L}_x} = \begin{bmatrix} -0{,}716\,04 \\ 0{,}958\,68 \\ -3{,}466\,27 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \mathbf{N}^{-1}\overline{\mathbf{L}_y} = \begin{bmatrix} 0{,}958\,86 \\ -1{,}283\,62 \\ 4{,}659\,79 \end{bmatrix}.$$

5. Определим поправки v_x и v_y (табл. 29) в измереиые иа сиимке координаты по формулам:

$$v_{x_i} = ax_i + by_i + c_i - l_{x_i};$$

$$v_{y_i} = dx_i + ey_i + f_i - l_{y_i}.$$

6. Найдем ошибки едииицы веса μ_x и μ_y. Они равны:

$$\mu_x = \sqrt{\frac{[vv]_x}{6}} = 0{,}008 \text{ мм}; \qquad \mu_y = \sqrt{\frac{[vv]_y}{6}} = 0{,}015 \text{ мм}.$$

7. Вычислим ошибки определения постояиных пластиики (в мм):

$$m_a = \mu_x\sqrt{q_{aa}} = 8{,}39\cdot10^{-5}; \quad m_b = \mu_x\sqrt{q_{bb}} = 9{,}38\cdot10^{-5};$$

$$m_c = \mu_x\sqrt{q_{cc}} = 2{,}703\cdot10^{-3}; \quad m_d = \mu_y\sqrt{q_{aa}} = 1{,}57\cdot10^{-4};$$

$$m_e = \mu_y\sqrt{q_{bb}} = 1{,}76\cdot10^{-4}; \quad m_f = \mu_y\sqrt{q_{cc}} = 5{,}068\cdot10^{-3}.$$

8. Определим идеальные координаты ИСЗ (в мм):

$$\xi_{\text{ИСЗ}} = x_{\text{ИСЗ}} + ax_{\text{ИСЗ}} + by_{\text{ИСЗ}} + c = -6{,}406\,59;$$

$$\eta_{\text{ИСЗ}} = y_{\text{ИСЗ}} + dx_{\text{ИСЗ}} + ey_{\text{ИСЗ}} + f = 16{,}705\,61.$$

9. Вычислим топоцентрические экваторнальные координаты ИСЗ:

$$\alpha_{ij} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\xi_{\text{ИСЗ}}}{F\cos D_0 - \eta_{\text{ИСЗ}}\sin D_0}\right) + A_0 = 10^h 11^m\, 34{,}944^s;$$

$$\delta_{ij} = \operatorname{arctg}\left[\left(\frac{\eta_{\text{ИСЗ}}\cos D_0 + F\sin D_0}{F\cos D_0 - \eta_{\text{ИСЗ}}\sin D_0}\right)\cos(\alpha_{ij} - A_0)\right] = 47°26'37{,}10''.$$

В полученные топоцентрические координаты α_{ij} и δ_{ij} далее вводятся поправки за рефракцию, рефракционный параллакс и аберрационное время.

§ 46. СПОСОБ ДЕЙЧА И СПОСОБ ШЛЕЗИНГЕРА

При использовании способа Дейча исходят из того, что идеальные координаты ξ и η связаны с измеренными x и y соотношениями (589) общего гомографического (коллинеарного) преобразования, а не формулами аффинного преобразования, которые лежат в основе способа Тернера. Таким образом, если записать формулы (589) в следующем виде:

$$\xi = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32} + 1}; \quad \eta = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + 1}, \tag{618}$$

то неизвестными в задаче будут восемь коэффициентов общего гомографического преобразования (578).

Соответствующие уравнения поправок для каждой опорной звезды примут вид

$$\begin{aligned} &a_{11}x + a_{12}y + a_{13} - a_{31}x\xi - a_{32}y\xi - \xi = v_x; \\ &a_{21}x + a_{22}y + a_{23} - a_{31}x\eta - a_{32}y\eta - \eta = v_y. \end{aligned} \tag{619}$$

Для n звезд получим две системы нормальных уравнений по координатам x и y:

$$\mathbf{N}_x \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{13} \\ a_{31} \\ a_{32} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{L}}_x; \quad \mathbf{N}_y \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ a_{31} \\ a_{32} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{L}}_y. \tag{620}$$

Дальнейшее решение выполняется в соответствии с правилами способа наименьших квадратов.

Способ Шлезингера основан на ряде преобразований формул Тернера и тоже предполагает наличие аффинной связи между идеальными и измеренными координатами.

Чтобы упростить вычислительные формулы способа Шлезингера, перенесем начало измеренных координат в точку, определяемую условиями $\Sigma x_i = \Sigma y_i = 0$. Таким образом, во всех последую-

щих формулах вместо измеренных координат используются их отклонения от средних арифметических всех опорных звезд.

Тогда нормальные уравнения, соответствующие уравнениям Тернера, напишем, например, для координаты ξ, в следующем виде:

$$\begin{aligned} a\Sigma x_i^2+b\Sigma x_i y_i&=\Sigma x_i l_i;\\ a\Sigma x_i y_i+b\Sigma y_i^2&=\Sigma y_i l_i;\\ cn&=\Sigma l_i. \end{aligned} \tag{621}$$

Из этих уравнений определим постоянные a, b и c:

$$\begin{aligned} a&=\frac{\Sigma x_i l_i \Sigma y_i^2-\Sigma y_i l_i \Sigma x_i y_i}{\Sigma x_i^2 \Sigma y_i^2-\Sigma x_i y_i \Sigma x_i y_i};\\ b&=\frac{\Sigma y_i l_i \Sigma x_i^2-\Sigma x_i l_i \Sigma x_i y_i}{\Sigma x_i^2 \Sigma y_i^2-\Sigma x_i y_i \Sigma x_i y_i};\\ c&=\frac{\Sigma l_i}{n}, \end{aligned} \tag{622}$$

где $l_i=\xi_i-x_i$; $i=1, 2, \ldots, n$, а n — число опорных звезд. Если присвоить индекс j измеренным и идеальным координатам определяемого изображения ИСЗ, а затем подставить значения a, b и c в уравнение Тернера для ИСЗ, то получим

$$\xi_j-x_j=\frac{x_j\Sigma x_i l_i \Sigma y_i^2-x_j\Sigma y_i l_i \Sigma x_i y_i+y_j\Sigma y_i l_i \Sigma x_i^2-y_i\Sigma x_i l_i \Sigma x_i y_i}{\Sigma x_i^2\Sigma y_i^2-\Sigma x_i y_i \Sigma x_i y_i}+ +\frac{\Sigma l_i}{n}, \tag{623}$$

После преобразования этого выражения будем иметь:

$$\xi_j-x_j=\Sigma D_i(\xi_i-l_i), \tag{624}$$

где величины D_i — некоторые численные коэффициенты, которые называют зависимостями и вычисляют по формуле

$$D_i=\frac{x_i\,(x_j\Sigma y_i^2)-y_i\,(x_j\Sigma x_i y_i)+y_i\,(y_j\Sigma x_i^2)-x_i\,(y_j\Sigma x_i y_i)}{\Sigma x_i^2\Sigma y_i^2-(\Sigma x_i y_i)^2}+\frac{1}{n}. \tag{625}$$

Формулы для вычисления D_i обладают симметрией относительно x_i и y_i, поэтому они будут справедливы и для координаты η.

Таким образом, зависимости D_i являются функциями измеренных координат x_j и y_j спутника и измеренных координат x_i и y_i опорных звезд. Легко показать, что сумма всех зависимостей D_i равна единице, т. е. $\Sigma D_i=1$, так как первые члены выражения (585), если выполнять суммирование по всем звездам, обращаются в нули в силу условий $\Sigma x_i=0$ и $\Sigma y_i=0$. Непосредственной под-

становкой можно также доказать, что зависимости D_i удовлетворяют равенствам:

$$x_j=\Sigma D_i x_i;\ y_j=\Sigma D_i y_i. \tag{626}$$

Теперь, комбинируя выражения (584) и (586), получим формулы для вычисления идеальных координат ИСЗ:

$$\xi_j=D_1\xi_1+D_2\xi_2+\ldots D_n\xi_n=\Sigma D_i\xi_i;$$
$$\eta_j=D_1\eta_1+D_2\eta_2+\ldots+D_n\eta_n=\Sigma D_i\eta_i. \tag{627}$$

Таким образом, идеальные координаты определяемого объекта при использовании способа Шлезингера выражаются как сумма произведений зависимостей D_i на соответствующие идеальные координаты опорных звезд. Преимущество метода Шлезингера состоит в том, что при переходе в систему другого опорного каталога звезд поправки в топоцентрические координаты ИСЗ, обусловленные малыми поправками $\Delta\alpha_i$, $\Delta\delta_i$ в координаты опорных звезд, можно получить непосредственно по формулам

$$\Delta\alpha_{\text{ИСЗ}}=D_1\Delta\alpha_1+D_2\Delta\alpha_2+\ldots+D_n\Delta\alpha_n;$$
$$\Delta\delta_{\text{ИСЗ}}=D_1\Delta\delta_1+D_2\Delta\delta_2+\ldots+D_n\Delta\delta_n, \tag{628}$$

минуя все промежуточные вычисления, соответствующие способу Тернера.

§ 47. ПРОЕКТИВНЫЕ КООРДИНАТЫ

До сих пор мы рассматривали методы обработки спутниковых астронегатнвов, основанные на связи инерциальных координат с идеальными, т. е. исходной являлась геометрия центральной проекции небольшой области небесной сферы на касательную плоскость. Эта проекция является очень хорошим приближением реальной проекции, формируемой фотографической камерой.

Теперь мы рассмотрим другой принцип обработки спутниковых астронегативов, в основе которого лежат *проективные преобразования*. Основным преимуществом методов, основанных на проективных преобразованиях, является автоматический учет в процессе обработки всех факторов, которые действуют линейно. Применение этого метода не требует знания элементов внутреннего ориентирования (координат оптического центра и фокусного расстояния камеры). Сами алгоритмы, основанные на проективных преобразованиях, достаточно просты и сводятся к применению стандартных операций вычисления векторных и смешанных векторных произведений.

В качестве обобщенной системы координат введем проективные координаты, представляющие собой отношения смешанных векторных произведений направлений на опорные звезды и определяемый объект.

Пусть между точками двух плоскостей Q и Q' установлено такое однозначное соответствие, при котором произвольной точке M плоскости Q соответствует точка $M'=f(M)$ плоскости Q'. Соответствие называется *проективным*, если точкам любой прямой плоскости Q соответствуют точки плоскости Q', а также точки, лежащие на некоторой прямой.

В случае когда плоскости совпадают, говорят о проективном отображении плоскости Q на себя.

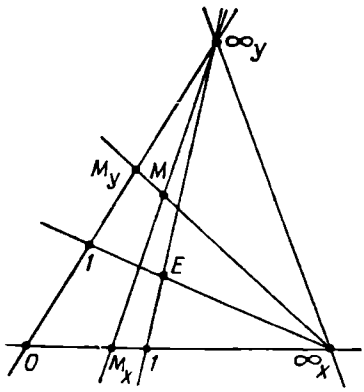

Рис. 28. Проективные координаты на плоскости

При проективном отображении плоскости Q на плоскость Q' множество точек каждой прямой l (плоскость Q) взаимно однозначно отображается на множество точек некоторой прямой l' плоскости Q', а множество лучей произвольного пучка на плоскости Q с центром в точке P также взаимно однозначно отображается на множество лучей пучка, центр которого P' является отображением точки P на плоскости Q'.

Поэтому, если $M'=f(M)$ — проективное отображение плоскости Q на плоскость Q', то обратное отображение $M=\varphi(M')$ плоскости Q' на плоскость Q также является проективным.

Приведем без доказательства следующую теорему проективной геометрии.

Проективное отображение плоскости Q на плоскость Q' однозначно определяется заданием четырех пар соответствующих по отображению точек при условии, что из четырех точек, задаваемых на плоскости Q, никакие три не лежат на одной прямой.

Пусть на произвольной проективной плоскости (рис. 28) дана некоторая прямая. Обозначим ее символом ∞. Будем называть эту прямую бесконечно удаленной и представим себе, что проективная плоскость разрезана вдоль этой прямой.

Проективная система координат определяется заданием следующих элементов: некоторой точкой O, называемой началом, двух прямых, проходящих через нее, одна из которых является осью X, а другая — осью Y. Кроме того, необходимо иметь еще точку E, не принадлежащую ни оси X, ни оси Y.

Пусть далее ∞_X и ∞_Y — бесконечно удаленные точки осей X и Y, т. е. точки их пересечения с прямой ∞. Спроектируем точку E из ∞_Y на ось X и из ∞_X на ось Y. Каждую из полученных проекций пометим цифрой 1. После этого можно внести на оси X линейную систему проективных координат, определяемую тремя точками O, I, ∞_X, и аналогично на оси Y — O, I, ∞_Y.

Рассмотрим далее точку M, которая произвольно расположена на проективной плоскости. Пусть M_X — проекция точки M из ∞_Y на ось X, а M_Y — из ∞_X на ось Y. Точка M_X в линейной системе координат на оси X имеет некоторую координату X, а точка M_Y на оси Y имеет координату Y.

X и Y называются проективными неоднородными координатами точки M. Каждая точка, принадлежащая оси X, имеет координаты $(x, 0)$, а каждая точка оси Y — координаты $(0, y)$. Точку E с координатами $(1, 1)$ называют точкой единиц.

В проективных неоднородных координатах каждая прямая определяется уравнением первой степени

$$AX+BY+C=0.$$

Введем теперь на проективной плоскости однородные проективные координаты для точек, не лежащих на прямой ∞.

Однородными проективными координатами точки M, не лежащей на прямой ∞, называют три числа x_1, x_2 и x_3, не равные одновременно нулю, и такие, что $x_1 : x_2 = X$; $x_2 : x_3 = Y$, где X и Y — неоднородные проективные координаты. Если точка расположена на прямой ∞, то у нее отсутствуют неоднородные координаты, поэтому сделанное определение однородных координат непригодно для точек, лежащих на прямой ∞.

Однородными координатами точки M_∞, лежащей на прямой ∞, называют три числа, удовлетворяющие следующим условиям:

$$x_3=0;$$

из двух чисел x_1 и x_2 хотя бы одно отличио от иуля;

отношеиие координат $x_1 : x_2 = B : (-A)$, где A и B — коэффициеиты уравиения $AX+BY+C=0$ любой прямой, проходящей через точку M_∞. Иначе говоря, координаты x_1 и x_2 должиы удовлетворять условию

$$Ax_1+Bx_2=0.$$

Важио отметить, что отиошение $B : (-A)$ не зависит от выбора прямой, проходящей через точку M_∞.

Из определеиия одиородных координиат вытекает следующее следствие.

Какова бы ни была точка M, лежащая на прямой $AX+BY+C=0$, ее одиородные координаты удовлетворяют соотиошению $Ax_1+Bx_2+Cx_3=0$ — это уравнение прямой в однородных координатах. Уравиение не содержит свободного члена, т. е. также является однородиым.

Основные свойства однородных координат

1. Каждая точка проективиой плоскости имеет одиородные координаты.

2. Если x_1, x_2, x_3 — однородиые координаты точки M, то ρx_1, ρx_2, ρx_3 (ρ — любое число, отличиое от нуля) тоже являются однородными координатами точки M.

3. Различиым точкам всегда соответствуют разлнчные отношеиия $x_1 : x_2 : x_3$ их однородных координат.

4. Ни для какой точки все ее три однородные координаты не обращаются одновременио в нуль. Любую из трех координиат ρx_1, ρx_2, ρx_3 можио принять равной единице (если она отлична от нуля) путем соответствующего подбора множителя ρ.

Пусть Q и Q' — две не обязательно различные плоскости. Введем иа каждой из иих произвольиую систему проективных координиат. Если плоскости Q и Q' совпадают, то и введеиные иа иих системы координат могут совпадать.

Выберем теперь какие-нибудь девять чисел c_{11}, c_{12}, c_{13}; c_{21}, c_{22}, c_{23}; c_{31}, c_{32}, c_{33}. Будем считать точку $M(x_1', x_2', x_3')$ плоскости Q' **отображением** точки $M(x_1, x_2, x_3)$ плоскости Q, если координаты этих точек удовлетворяют равенствам:

$$\begin{aligned}
\rho' x_1' &= c_{11}x_1+c_{12}x_2+c_{13}x_3;\\
\rho' x_2' &= c_{21}x_1+c_{22}x_2+c_{23}x_3;\\
\rho' x_3' &= c_{31}x_1+c_{32}x_2+c_{33}x_3,
\end{aligned} \tag{629}$$

где ρ' — любое число, не равиое нулю. Такое отображение называют линейным и обозиачают символической записью $M'=L(M)$. Как было указано, по свойствам одиородных координат выбор множителя ρ' не влияет на положеиие точки M' с координиатами $\rho' x_1'$, $\rho' x_2'$ и $\rho' x_3'$. Поэтому точка M имеет в качестве своего отображения одну единственную точку M'. Числа c_{ik}, определяющие линейное отображение, составляют матрицу

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{bmatrix}, \tag{630}$$

которая иазывается матрицей **линейиого отображения**, а числа c_{ik} — **коэффициеитами отображеиия**.

Определитель матрицы (630) $\det \mathbf{C}$ называется определителем отображения. Если $\det \mathbf{C}=0$, то ие каждая точка плоскости имеет свое отображение на плоскости.

Теорема. Если M_1, M_2, M_3, M_4 — четыре точки плоскости Q, расположеиные в ией как угодно, ио с соблюдением условия, что никакие три из них ие лежат

на одной прямой, а M_1', M_2', M_3', M_4' — четыре точки плоскости Q' и их положения определены аналогично, то существует линейное отображение плоскости Q на плоскость Q' с определителем, отличным от нуля. Оно преобразует точки M_1, M_2, M_3, M_4 соответственно в точки M_1', M_2', M_3', M_4'.

Доказательство. Пусть x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}, x_{4k} — координаты одной из точек M_k $(k=1, 2, 3, 4)$ в системе однородных проективных координат на плоскости Q и x_{1k}', x_{2k}', x_{3k}', x_{4k}' — координаты точки M_k' $(k=1, 2, 3, 4)$ в системе однородных координат на плоскости Q'.

Требуется доказать, что определитель линейного преобразования (630) отличен от нуля и что это преобразование переводит точки M_1, M_2, M_3, M_4 в соответственные точки M_1', M_2', M_3', M_4'.

Для этого нужно принять, что из соотношений

$$\begin{aligned}
\rho_k' x_{1k}' &= c_{11}x_{1k} + c_{12}x_{2k} + c_{13}x_{3k};\\
\rho_k' x_{2k}' &= c_{21}x_{1k} + c_{22}x_{2k} + c_{23}x_{3k};\\
\rho_k' x_{3k}' &= c_{31}x_{1k} + c_{32}x_{2k} + c_{33}x_{3k} \quad (k=1, 2, 3, 4)
\end{aligned} \tag{631}$$

могут быть найдены параметры c_{ik} и величины ρ_k', а определитель преобразования (630) не равен нулю.

Прежде всего докажем, что ни один из определителей третьего порядка матрицы $\mathbf{C}$,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \\ x_{14} & x_{24} & x_{34} \end{bmatrix}, \tag{632}$$

не равен нулю. Если бы, например, имело место равенство

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{bmatrix} = 0, \tag{633}$$

то существовали бы линейные связи между координатами и поэтому точки M_1, M_2 и M_3 принадлежали бы одной прямой $ux_1+ux_2+ux_3=0$, что противоречит условию теоремы.

Приняв в соотношениях (631) $k=1, 2, 3$, напишем три уравнения, которые вытекают из первого соотношения (631):

$$\begin{aligned}
c_{11}x_{11} + c_{12}x_{21} + c_{13}x_{31} &= \rho_1' x_{11}';\\
c_{11}x_{12} + c_{12}x_{22} + c_{13}x_{32} &= \rho_2' x_{12}';\\
c_{11}x_{13} + c_{12}x_{23} + c_{13}x_{33} &= \rho_3' x_{13}'.
\end{aligned} \tag{634}$$

Выражения представляют собой систему линейных уравнений с неизвестными c_{11}, c_{12}, c_{13}.

Определитель D системы (634), как было доказано, отличен от нуля. Поэтому решение системы можно записать в виде

$$c_{11}=\frac{\rho_1'x_{11}'X_{11}+\rho_2'x_{12}'X_{12}+\rho_3'x_{13}'X_{13}}{D};$$

$$c_{12}=\frac{\rho_1'x_{11}'X_{21}+\rho_2'x_{12}'X_{22}+\rho_3'x_{13}'X_{23}}{D}; \qquad (635)$$

$$c_{13}=\frac{\rho_1'x_{11}'X_{31}+\rho_2'x_{12}'X_{32}+\rho_3'x_{13}'X_{33}}{D},$$

где X_{ik} — алгебраическое дополнение элемента x_{ik} определителя D.

Точно так же, используя второе уравнение (631), получим

$$c_{21}=\frac{\rho_1'x_{21}'X_{11}+\rho_2'x_{22}'X_{12}+\rho_3'x_{23}'X_{13}}{D};$$

$$c_{22}=\frac{\rho_1'x_{21}'X_{21}+\rho_2'x_{22}'X_{22}+\rho_3'x_{23}'X_{23}}{D}; \qquad (636)$$

$$c_{23}=\frac{\rho_1'x_{21}'X_{31}+\rho_2'x_{22}'X_{32}+\rho_3'x_{23}'X_{33}}{D}$$

и аналогично, используя третье уравнение,

$$c_{31}=\frac{\rho_1'x_{31}'X_{11}+\rho_2'x_{32}'X_{12}+\rho_3'x_{33}'X_{13}}{D};$$

$$c_{32}=\frac{\rho_1'x_{31}'X_{21}+\rho_2'x_{32}'X_{22}+\rho_3'x_{33}'X_{23}}{D}; \qquad (637)$$

$$c_{33}=\frac{\rho_1'x_{31}'X_{31}+\rho_2'x_{32}'X_{32}+\rho_3'x_{33}'X_{33}}{D}.$$

Подставим теперь значения c_{ik}, определяемые формулами (635), (636), (637), в уравнения (631) при $k=4$ и положим $\rho_4'=1$. После преобразований и группировки членов получим:

$$x_{14}'=\frac{x_{11}'D_1}{D}\rho_1'+\frac{x_{12}'D_2}{D}\rho_2'+\frac{x_{13}'D_3}{D}\rho_3';$$

$$x_{24}'=\frac{x_{21}'D_1}{D}\rho_1'+\frac{x_{22}'D_2}{D}\rho_2'+\frac{x_{23}'D_3}{D}\rho_3'; \qquad (638)$$

$$x_{34}'=\frac{x_{31}'D_1}{D}\rho_1'+\frac{x_{32}'D_2}{D}\rho_2'+\frac{x_{33}'D_3}{D}\rho_3',$$

где

$$\begin{aligned} D_1&=X_{11}x_{14}+X_{21}x_{24}+X_{31}x_{34};\\ D_2&=X_{12}x_{14}+X_{22}x_{24}+X_{32}x_{34}; \qquad (639)\\ D_3&=X_{13}x_{14}+X_{23}x_{24}+X_{33}x_{34}. \end{aligned}$$

Выражения (639) представляют собой определители третьего порядка матрицы C, определяемой формулой (632), поэтому $D_1 \neq 0$, $D_2 \neq 0$, $D_3 \neq 0$.

Если положить, что

$$D' = \begin{vmatrix} x'_{11} & x'_{12} & x'_{13} \\ x'_{21} & x'_{22} & x'_{23} \\ x'_{31} & x'_{32} & x'_{33} \end{vmatrix},$$

то определитель системы (638) получим в виде

$$A = \frac{D'}{D^3} D_1 D_2 D_3, \tag{640}$$

поэтому $A \neq 0$. Положим, что $\frac{D}{D'} = \lambda$.

Тогда, решив систему (638) относительно ρ_1', ρ_2' и ρ_3', получим:

$$\rho_1' = \lambda \frac{\begin{vmatrix} x'_{14} & x'_{12} & x'_{13} \\ x'_{24} & x'_{22} & x'_{23} \\ x'_{34} & x'_{32} & x'_{33} \end{vmatrix}}{D_1};$$

$$\rho_2' = \lambda \frac{\begin{vmatrix} x'_{11} & x'_{14} & x'_{13} \\ x'_{21} & x'_{24} & x'_{23} \\ x'_{31} & x'_{34} & x'_{33} \end{vmatrix}}{D_2}; \tag{641}$$

$$\rho_3' = \lambda \frac{\begin{vmatrix} x'_{11} & x'_{12} & x'_{14} \\ x'_{21} & x'_{22} & x'_{24} \\ x'_{31} & x'_{32} & x'_{34} \end{vmatrix}}{D_3}.$$

Поскольку все определители, через которые выражены величины ρ_1', ρ_2' и ρ_3', отличны от нуля, то $\rho_1' \neq 0$; $\rho_2' \neq 0$; $\rho_3' \neq 0$.

После того как значения ρ_1', ρ_2' и ρ_3' определены, параметры c_{ik} найдем по формулам (635)—(637).

Таким образом, линейное преобразование (631) при найденных значениях c_{ik} переводит точки M_1, M_2, M_3, M_4 в точки M_1', M_2', M_3', M_4' и имеет определитель, отличный от нуля.

§ 48. ДВОЙНОЕ ОТНОШЕНИЕ ЧЕТЫРЕХ ТОЧЕК

Выше было показано, что для задания проективной координаты некоторой точки на прямой надо зафиксировать три координатные точки. Так, при задании координаты x на оси X будут установлены точки O, 1, ∞_X, а при задании y — точки O, 1, ∞_Y, принадлежащие оси Y.

Вообще, проективной координатой точки D на прямой ABC называется двойное (или сложное) отношение четырех точек

$$\nu = (ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}, \tag{642}$$

где ν или $(ABCD)$ — обозначение двойного отношения. Эта формула является определением двойного отношения. Двойное отношение не изменяется при любом расположении четырех точек на прямой; оно является основным метрическим инвариантом проективной геометрии.

Если четыре точки A, B, C, D отложить на прямой и зафиксировать для каждой из них координату на прямой, то сложное отношение можно определить формулой

$$\nu = \frac{x_C - x_A}{x_C - x_B} : \frac{x_D - x_A}{x_D - x_B}. \tag{643}$$

Сложное отношение обладает свойством

$$(ABCD) = (CDAB) = (BADC),$$

т. е.

$$(CDAB) = \frac{CA}{DA} : \frac{CB}{DB} = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = (ABCD),$$

но при других перестановках букв оно изменяется и преобразуется в следующее:

$$(ABC\,D) = \frac{1}{(ABDC)}; \quad (ABCD) = \frac{1}{(BACD)}.$$

Сложное отношение является координатой точки на прямой, т. е. однозначно определяет положение этой точки.

Пусть в формуле (643) координата точки D является переменной, тогда и сложное отношение будет переменным. Если уравнение (643) решить относительно x_D, то получим

$$x_D = \frac{\nu(x_B x_A - x_C x_A) + x_C x_B - x_A x_B}{\nu(x_B - x_A) + x_C - x_A}. \tag{644}$$

Из формулы (644) следует, что каждому значению двойного отношения ν соответствует единственное значение координаты x_D; поскольку координаты x_A, x_B и x_C постоянны, то двойное отношение ν является координатой точки D на прямой с тремя постоянными точками.

Установим теперь связь двойного отношения с проективными координатами точек плоскости.

Поскольку для задания проективных координат точки M на плоскости необходимы четыре фиксированные неколлинеарные точки A, B, C, D, то проективные неоднородные координаты X и Y точки M (рис. 29) выразятся двойными отношениями $(MDPQ)$ и $(MDPR)$:

$$\begin{aligned} X &= (MDPQ) = \frac{MP}{DP} : \frac{MQ}{DQ} = \frac{\xi}{\eta}, \\ Y &= (MDPR) = \frac{MP}{DP} : \frac{MR}{DR} = \frac{\xi}{\zeta}, \end{aligned} \tag{645}$$

где x_1, x_2 и x_3 — простые отношения, которые являются однородными координатами

$$\xi = \frac{MP}{DP}; \quad \eta = \frac{MQ}{DQ}; \quad \zeta = \frac{MR}{DR}. \tag{646}$$

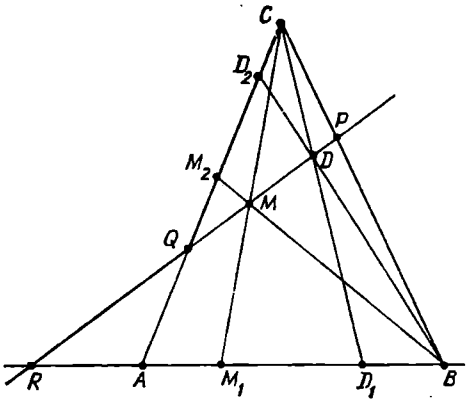

Рис. 29. Двойное отношение и проективные координаты

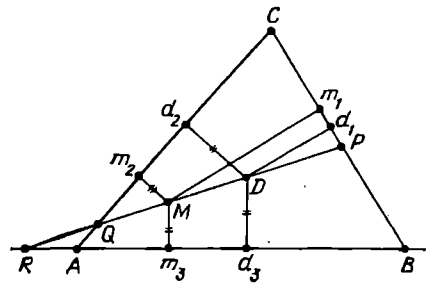

Рис. 30. Подобные треугольники и проективные координаты

Из подобных треугольников MPm_1 и DPd_1; MQm_2 и DQd_2; MRm_3 и DRd_3 (рис. 30) следует, что

$$\frac{MP}{DP}=\frac{Mm_1}{Dd_1};\quad \frac{MQ}{DQ}=\frac{Mm_2}{Dd_2};\quad \frac{MR}{DR}=\frac{Mm_3}{Dd_3}. \tag{647}$$

Сравнив формулы (646) и (647), получим однородные координаты точки M в виде отношений:

$$\xi_M=\frac{Mm_1}{Dd_1};\quad \eta_M=\frac{Mm_2}{Dd_2};\quad \zeta_M=\frac{Mm_3}{Dd_3}, \tag{648}$$

Из этих выражений следует, что однородные проективные координаты точки M являются отношениями расстояний от точек M и D до сторон координатного треугольника ABC. Если точки M и D совпадают, то эти отношения равны единице, поэтому точка D является единичной.

Обозначим теперь аффинные координаты точек A, B, C, D, M соответственно (x_1y_1), (x_2y_2), (x_3y_3), (x_4y_4), (x, y). Тогда, как известно из аналитической геометрии, отношение расстояний точек M и D до прямых AB, BC, CD можно определить как отношения определителей:

$$\xi_M=\frac{\begin{vmatrix} x & x_2 & x_3\\ y & y_2 & y_3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_4 & x_2 & x_3\\ y_4 & y_2 & y_3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}};\quad \eta_M=\frac{\begin{vmatrix} x_1 & x & x_3\\ y_1 & y & y_3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_4 & x_3\\ y_1 & y_4 & y_3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}};\quad \zeta_M=\frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x\\ y_1 & y_2 & y\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_4\\ y_1 & y_2 & y_4\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}}. \tag{649}$$

§ 49. СПОСОБ Ю. М. ТРУНИНА

Способ обработки астронегативов, основанный на векторной интерпретации основных соотношений проективной геометрии, был предложен Ю. М. Трунивым.

Пусть в инерциальной системе координат по данным звездного каталога и в результате вычислений получены видимые координаты четырех опорных звезд на астронегативе:

$$(\alpha_1, \delta_1),\ (\alpha_2, \delta_2),\ (\alpha_3, \delta_3),\ (\alpha_4, \delta_4).$$

Составим четыре опорных единичных вектора направлений на звезды в инерциальной системе координат:

$$\bar{\mathbf{R}}_1^0 = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 \cos\delta_1 \\ \sin\alpha_1 \cos\delta_1 \\ \sin\delta_1 \end{pmatrix};\quad \bar{\mathbf{R}}_2^0 = \begin{pmatrix} \cos\alpha_2 \cos\delta_2 \\ \sin\alpha_2 \cos\delta_2 \\ \sin\delta_2 \end{pmatrix};$$
$$\bar{\mathbf{R}}_3^0 = \begin{pmatrix} \cos\alpha_3 \cos\delta_3 \\ \sin\alpha_3 \cos\delta_3 \\ \sin\delta_3 \end{pmatrix};\quad \bar{\mathbf{R}}_4^0 = \begin{pmatrix} \cos\alpha_4 \cos\delta_4 \\ \sin\alpha_4 \cos\delta_4 \\ \sin\delta_4 \end{pmatrix}. \tag{650}$$

Пусть на астронегативе измерены координаты этих же четырех опорных звезд и ИСЗ: (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) и (x, y). Если за начало координат принять вершину связки, т. е. вторую узловую точку объектива, то векторы $\bar{\mathbf{r}}_i$ и $\bar{\mathbf{r}}$, проходящие через начало координат, и соответствующие точки астронегатива $(x_i, y_i,\ i=1, 2, 3, 4)$ и (x, y) можно задать через однородные координаты, приняв $z=\text{const}=1$:

$$\bar{\mathbf{r}}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix};\quad \bar{\mathbf{r}}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix};\quad \bar{\mathbf{r}}_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ 1 \end{pmatrix};\quad \bar{\mathbf{r}}_4 = \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ 1 \end{pmatrix};$$
$$\bar{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{651}$$

В соответствии с изложенной выше теорией проективных преобразований этих данных достаточно для определения топоцентрического направления $\bar{\mathbf{R}}_{ij}^0$ на ИСЗ:

$$\bar{\mathbf{R}}_{ij}^0 = \begin{pmatrix} \cos\alpha_{ij} \cos\delta_{ij} \\ \sin\alpha_{ij} \cos\delta_{ij} \\ \sin\delta_{ij} \end{pmatrix}.$$

В способе Ю. М. Трунина проективными однородными координатами ИСЗ являются отношения смешанных векторных произведений измеренных на снимке координат опорных звезд и ИСЗ:

$$\xi = \frac{(\bar{r}_2\,\bar{r}_3\,\bar{r})}{(\bar{r}_2\,\bar{r}_3\,\bar{r}_4)} = \frac{\begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x \\ y_2 & y_3 & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_4 \\ y_2 & y_3 & y_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}};$$

$$\eta = \frac{(\bar{r}_3\,\bar{r}_1\,\bar{r})}{(\bar{r}_3\,\bar{r}_1\,\bar{r}_4)} = \frac{\begin{vmatrix} x_3 & x_1 & x \\ y_3 & y_1 & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_3 & x_1 & x_4 \\ y_3 & y_1 & y_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}; \qquad (652)$$

$$\zeta = \frac{(\bar{r}_1\,\bar{r}_2\,\bar{r})}{(\bar{r}_1\,\bar{r}_2\,\bar{r}_4)} = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x \\ y_1 & y_2 & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}.$$

Топоцентрическое направление на ИСЗ определяется выражением

$$\rho\bar{R}^0_{ij} = -(A\xi\bar{R}^0_1 + B\eta\bar{R}^0_2 + C\zeta\bar{R}^0_3), \qquad (653)$$

где A, B, C — смешанные векторные произведения, составленные из единичных векторов $\bar{R}_1{}^0$, $\bar{R}_2{}^0$, $\bar{R}_3{}^0$, $\bar{R}_4{}^0$, определяющих направления на опорные звезды в инерциальной системе координат, т. е.

$$A = (\bar{R}_2{}^0\bar{R}_3{}^0\bar{R}_4{}^0) = \begin{vmatrix} l_2 & l_3 & l_4 \\ m_2 & m_3 & m_4 \\ n_2 & n_3 & n_4 \end{vmatrix};$$

$$B = (\bar{R}_3{}^0\bar{R}_1{}^0\bar{R}_4{}^0) = \begin{vmatrix} l_3 & l_1 & l_4 \\ m_3 & m_1 & m_4 \\ n_3 & n_1 & n_4 \end{vmatrix}; \qquad (654)$$

$$C = (\bar{R}_1{}^0\bar{R}^0{}_2\bar{R}_4{}^0) = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_4 \\ m_1 & m_2 & m_4 \\ n_1 & n_2 & n_4 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, направляющие косинусы l_{ij}, m_{ij} и n_{ij} топоцентрического направления на ИСЗ получим из выражений:

$$\begin{aligned}
&\rho l_{ij}=L_{ij}=-(A\xi\cos\alpha_1\cos\delta_1+B\eta\cos\alpha_2\cos\delta_2+\\
&+C\zeta\cos\alpha_3\cos\delta_3);\\
&\rho m_{ij}=M_{ij}=-(A\xi\sin\alpha_1\cos\delta_1+B\eta\sin\alpha_2\cos\delta_2+\\
&+C\zeta\sin\alpha_3\cos\delta_3);\\
&\rho n_{ij}=N_{ij}=-(A\xi\sin\delta_1+B\eta\sin\delta_2+C\zeta\sin\delta_3),
\end{aligned}\qquad (655)$$

а топоцентрические координаты ИСЗ — по формулам:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tg}\alpha_{ij}=\frac{M_{ij}}{L_{ij}};\\
&\operatorname{tg}\delta_{ij}=\frac{N_{ij}}{\sqrt{M_{ij}^2+L_{ij}^2}}.
\end{aligned}\qquad (656)$$

Рассмотренный способ обладает бóльшим преимуществом по сравнению со способами типа Тернера: в силу свойств проективных координат в нем не требуется знать элементы внутреннего ориентирования камеры. Кроме того, поскольку проективные координаты инвариантны к коллинеарным преобразованиям снимка, способ дает возможность автоматически учесть все линейные искажения, в частности, регулярные деформации фотоматериала.

Решение по методу наименьших квадратов при использовании проективных координат затруднительно, поэтому приближенно оценку точности можно выполнить следующим образом.

Опорные звезды группируются по четверкам, при этом каждая опорная звезда включается лишь в одну четверку.

Используя n четверок, вычисляют n значений топоцентрических координат ИСЗ и их среднее арифметическое

$$\bar{\alpha}_{ij}=\frac{\sum^{n}\alpha_{ij}}{n};\quad \bar{\delta}_{ij}=\frac{\sum^{n}\delta_{ij}}{n}.$$

Определяют средние квадратические ошибки координат ИСЗ:

$$m_{\alpha_{ij}}=\sqrt{\frac{[vv]_\alpha}{n-1}};\quad m_{\delta_{ij}}=\sqrt{\frac{[vv]_\delta}{n-1}},$$

где v_α и v_δ — отклонения от среднего арифметического.

Пример 20. Определить топоцентрическое направление на ИСЗ по способу Ю. М. Трунина, используя для этого необходимые данные примера 19.

Решение.

1. Сгруппируем первые восемь опорных звезд по четверкам:

I. *Первая четверка* (табл. 30).

Таблица 30

Объект	x, мм	y, мм	l	m	n
1	— 2,5138	6,1793	—0,62137482	0,30535918	0,72156018
2	—15,2623	4,2418	—0,62823891	0,31706115	0,71048441
3	20,8184	—15,2421	—0,58746128	0,30963732	0,74767237
4	—35,2719	—16,2055	—0,62397601	0,35323551	0,69704993
ИСЗ	10,7163	— 6,2421	—	—	—

2. Вычислим проективные координаты ИСЗ:

$$\xi = \frac{\begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x \\ y_2 & y_3 & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_4 \\ y_2 & y_3 & y_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{127,897\,99}{-1\,127,617\,94} = -1\,134\,2316\ 10^{-1};$$

$$\eta = \frac{\begin{vmatrix} x_3 & x_1 & x \\ y_3 & y_1 & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_3 & x_1 & x_4 \\ y_3 & y_1 & y_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{6,411\,324\,9}{1\,224,0110} = 5,237\,964 \cdot 10^{-3};$$

$$\zeta = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x \\ y_1 & y_2 & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{183,987\,537}{221,903\,804} = 8,291\,320 \cdot 10^{-1}.$$

3. Вычислим смешанные векторные произведения опорных направлений на звезды:

$$A = \overline{(\overline{R}_2\overline{R}_3{}^0\overline{R}_4{}^0)} = \begin{vmatrix} l_2 & l_3 & l_4 \\ m_2 & m_3 & m_4 \\ n_2 & n_3 & n_4 \end{vmatrix} = 2,076\,962 \cdot 10^{-3};$$

$$B = (\overline{R}_3{}^0\overline{R}_1{}^0\overline{R}_4{}^0) = \begin{vmatrix} l_3 & l_1 & l_4 \\ m_3 & m_1 & m_4 \\ n_3 & n_1 & n_4 \end{vmatrix} = -2,254\,649 \cdot 10^{-3};$$

$$C = (\overline{R_1\overline{R}_2{}^0\overline{R}_4{}^0}) = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_4 \\ m_1 & m_2 & m_4 \\ n_1 & n_2 & n_4 \end{vmatrix} = -4,090\,189 \cdot 10^{-4};$$

$A\xi = -2,355\,756 \cdot 10^{-4}$; $B\eta = -1,180\,97 \cdot 10^{-5}$; $C\zeta = -3,391\,07 \cdot 10^{-4}$.

Таблица 31

Объект	x, мм	y, мм	l	m	n
1	—47,1859	24,2116	—6,60134642	0,24794587	0,75954284
2	53,2143	42,2057	—0,68270245	0,30533836	0,66384173
3	—20,1817	—36,9028	—0,59645371	0,36314044	0,71580164
4	50,2130	—22,7144	—0,56020887	0,29430193	0,77430769
ИСЗ	10,7163	— 6,2421	—	—	—

4. Определим направляющие косинусы направления на ИСЗ:

$\rho l_{ij}=L_{ij}=-(A\xi l_1+B\eta l_2+C\zeta l_3)=-3{,}530\,2621\cdot10^{-4}$;

$\rho m_{ij}=M_{ij}=-(A\xi m_1+B\eta m_2+C\zeta m_3)=1{,}806\,8709\cdot10^{-4}$;

$\rho n_{ij}=N_{ij}=-(A\xi n_1+B\eta n_2+C\zeta n_3)=4{,}319\,3123\cdot10^{-4}$.

5. Вычислим топоцентрические координаты ИСЗ:

$$\alpha_{ij}=\operatorname{arctg}\frac{M_{ij}}{L_{ij}}=10^h11^m34{,}937^s;$$

$$\delta_{ij}=\operatorname{arctg}\frac{N_{ij}}{\sqrt{M_{ij}^2+L_{ij}^2}}=47^\circ26'35{,}76'',$$

II. *Вторая четверка* (табл. 31).

Вычисления проводим в той же последовательности, что и для первой четверки. Получим:

$$\xi=\frac{3457{,}0971}{6037{,}4989}=5{.}7260418\cdot10^{-1};$$

$$\eta=\frac{177{,}2250}{-3346{,}2914}=-5{,}296\,1616\cdot10^{-2};$$

$$\zeta=\frac{3713{,}7952}{4656{,}9088}=7{,}974\,806\cdot10^{-1};$$

$A=-1{,}104\,8536\cdot10^{-2}$; $B=6{,}133\,2562\cdot10^{-3}$;

$C=-8{,}513\,4191\cdot10^{-3}$;

$A\xi=-6{,}326\,4379\cdot10^{-3}$; $B\eta=-3{,}248\,2716\cdot10^{-4}$;

$C\zeta=-6{,}789\,2866\cdot10^{-3}$;

$\rho l_{ij}=-8{,}075\,6364\cdot10^{-3}$; $\rho m_{ij}=4{,}133\,2608\cdot10^{-3}$; $\rho n_{ij}=9{,}880\,6169\cdot10^{-3}$;

$\alpha_{ij}=10^h11^m34{,}989^s$; $\delta_{ij}=47^\circ26'35{,}89''$.

Сравнив эти результаты с полученными по первой четверке, убеждаемся в их хорошей сходимости.

Глава IX
КОСМИЧЕСКАЯ ФОТОГРАММЕТРИЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ЛУНЫ И ПЛАНЕТ

§ 50. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ КОСМИЧЕСКОЙ ФОТОГРАММЕТРИИ ПРИ ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ СЪЕМОК ЛУНЫ И ПЛАНЕТ

При обработке снимков Луны и планет необходимо, чтобы проектирующие лучи, строящие изображение некоторой точки поверхности планеты, были зафиксированы в инерциальной системе координат.

Инерциальная система координат является опорной при картографировании планет.

В качестве инерциальных систем координат в космической фотограмметрии используют планетоцентрические геоэкваториальные, закрепленные на некоторую стандартную эпоху фундаментальным каталогом положений, собственных движений и параллаксов опорных звезд.

Однако окончательные результаты картографирования Луны и планет должны быть представлены в планетоцентрических системах координат, жестко связанных с вращающейся планетой. Для этого необходимо установить и закрепить нулевой меридиан и ось вращения планеты.

Выбор и закрепление нулевого меридиана небесного тела состоит в следующем. Сначала в качестве нулевого меридиана принимают плоскость центрального меридиана, который наблюдается из центра масс Земли в фиксированный момент времени, например на стандартную эпоху каталога.

После того как определена угловая скорость вращения планеты, направление нулевого меридиана можно определить в инерциальной системе координат стандартной эпохи (на этом этапе начальный меридиан еще никак не связан с характерными точками и контурами поверхности небесного тела). В результате проведения космических съемок небесного тела уточняют его угловую скорость вращения и строят опорную сеть. Затем положение нулевого меридиана закрепляют некоторой характерной точкой местности на поверхности, которую выбирают вблизи экватора и задают ее планетоцентрической долготой относительно нулевого меридиана.

В настоящее время точные законы вращения тел Солнечной системы вокруг своих осей установить еще не удалось. Поэтому в качестве параметров, определяющих вращение планеты, используют средние координаты северного полюса планеты, а вращение предполагается равномерным.

Изучение неравномерности вращения планет, прецессии и нутации их осей вращения, движения полюсов — одна из основных

задач будущих астрометрических и радиолокационных наблюдений.

Весьма важно и определение ориентации планетоцентрических координат в инерциальной системе координат, его осуществляют методами космической фотограмметрии и радиоастрономии.

Периоды вращения планет определяют по космическим снимкам, полученным через большие промежутки времени.

Опорные сети на планетах создаются методом аналитической фототриангуляции. Поскольку опорные точки на поверхности планеты отсутствуют, возникает необходимость использовать элементы орбиты для определения координат центров фотографирования, звездные камеры и звездные датчики — для определения ориентации топографической камеры и расстояния от АМС до точек местности, полученные при помощи лазерных дальномеров и в результате радиопрофилирования.

При построении сетей фототриангуляции на планетах помимо кадровых снимков используют телевизионные, а также радиолокационные панорамы.

Особую проблему представляет собой выбор референцных поверхностей для создания математической основы карт Луны и планет. Для этого необходимо предварительное установление динамических фигур планет, которые определяются по данным об их рельефе и гравитационном поле. Эта задача решается на основе совместного использования астрометрических, гравиметрических и фотограмметрических методов.

Основные задачи, возникающие при использовании методов космической фотограмметрии для обработки результатов съемки Луны и планет, заключаются в следующем:

определение элементов внешнего ориентирования космических снимков по звездным и определение взаимной ориентации топографических и звездных снимков;

построение и уравнивание маршрутных и блочных сетей космической фототриангуляции с совместным определением элементов внешней ориентации снимков, координат точек поверхности в планетоцентрической системе координат и начальных условий движения космического аппарата;

использование данных радиопрофилирования для определения высот точек планеты;

дешифрирование космических снимков, полученных в различных зонах спектра, а также радиолокационных изображений, создание специальных дешифровочных эталонов для элементов типичных поверхностей планет.

Помимо этого к числу задач космической фотограмметрии при съемках планет относится разработка способов и методик использования материалов съемки небольших участков поверхности планеты, полученных с посадочных аппаратов АМС.

В перспективе по мере расширения программ космических съемок и углубления знаний о небесных телах окажется возможным создание опорной сети, охватывающей всю Солнечную систему. Для решения этой грандиозной задачи потребуются коллективные усилия ученых всех стран Земли. При этом прежде всего необходимо создать систему, включающую комплекс программ для ЭВМ и банк данных астродинамических параметров и координат опорных точек в планетоцентрических системах координат. Банк должен быть достаточным для определения в любой момент координат центра масс планеты в инерциальной системе координат и координат опорных точек планеты относительно геоэкваториальных систем координат, закрепленных на определенные эпохи, а также для ориентации осей планетоцентрических систем координат.

§ 51. УСТАНОВЛЕНИЕ КООРДИНАТ СЕВЕРНОГО ПОЛЮСА ВРАЩЕНИЯ ПЛАНЕТ И НУЛЕВЫХ МЕРИДИАНОВ

Направление северного полюса вращения планеты или спутника планеты задают в инерциальной геоэкваториальной системе координат через средние координаты: прямое восхождение α_0 и склонение δ_0 в стандартную эпоху T_0.

По рекомендации МАС северным полюсом планеты принято считать тот из полюсов, который лежит к северу от неизменяемой плоскости Солнечной системы.

В теории задачи n тел доказывается, что сумма моментов количества движений (или кинетических моментов) всех n тел, образующих систему, является постоянной величиной, т. е.

$$\sum_1^n m_i \bar{R}_i \times \dot{\bar{R}}_i = \bar{C}.$$

Постоянный вектор $\bar{C}$ является нормалью к неизменяемой плоскости Лапласа. Если спроектировать это уравнение на оси инерциальной гелиоцентрической системы координат, то получим три интеграла

$$\sum_1^n m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) = c_1;$$

$$\sum_1^n m_i (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i) = c_2;$$

$$\sum_1^n m_i (z_i \dot{x}_i - x_i \dot{z}_i) = c_3,$$

которые являются аналогами соответствующих интегралов задачи двух тел, рассмотренной в главе IV. Суммирование выполняется по всем телам, входящим в Солнечную систему. Направляющие косинусы c_1, c_2, c_3, определяющие направление вектора $\overline{C}$, можно вычислить, зная для некоторого момента координаты и составляющие скорости всех тел Солнечной системы, а также их массы. Поскольку в настоящее время все эти величины известны лишь приближенно, то и положение неизменяемой плоскости Солнечной системы тоже приближенно. Эта плоскость наклонена под углом примерно 1,5° к плоскости эклиптики и лежит между плоскостями орбит Юпитера и Сатурна, двух самых массивных планет.

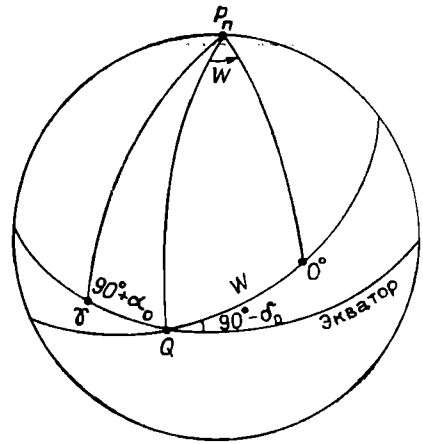

Рис. 31. Северный полюс вращения планеты и положение нулевого меридиана

В соответствии с рекомендациями МАС элементы вращения планет относят к двум стандартным координатным системам.

Первая система закреплена каталогом FK-4, и начальной стандартной эпохой для нее является юлианская эфемеридная дата JED=2 433 282,423 357, которая соответствует началу Бесселева года (T_0=1950,0).

Вторая система закреплена каталогом FK-5, которому соответствует начальная эпоха JD=245 1545,0 (2000, январь 1,5).

Положение нулевого меридиана планеты определяется углом $W(<QP_n0°)$, который отсчитывается на небесной сфере от точки Q (рис. 31), расположенной на линии пересечения экватора планеты с плоскостью экватора Земли в стандартную эпоху T_0. Таким образом, точка Q есть восходящий узел экватора планеты на среднем экваторе Земли в стандартную эпоху. Прямое восхождение точки Q будет следующим:

$$\alpha_Q = 90° + \alpha_0;$$

склонение точки Q —

$$\delta_Q = 90° - \delta_0,$$

где α_0 и δ_0 — инерциальные координаты среднего полюса планеты.

Если смотреть с северного полюса планеты P_n, то положительное значение угла W измеряется против часовой стрелки, т. е. в направлении на восток. Если предположить, что вращение планеты равномерно, то угол является линейной функцией времени.

Таблица 32

Эпоха J2000

Солнце и планеты	α_0	δ_0	W
Солнце	285,96°	63,96°	84,11°+14,184 4000 d
Меркурий	281,01—0,033 T	61,45—0,005 T	329,71+6,138 5025 d
Венера	272,78	67,21	159,91—1,481 4205 d
Земля	0,00—0,641 T	90,00—0,557 T	100,21+360,985 6123 d
Марс	317,681—0,108 T	52,886—0,061 T	176,646+350,891 9830 d
Юпитер	268,05—0,009 T	64,49—0,003 T	284,95+870,536 0000 d
Сатури	40,58—0,036 T	83,45—0,004 T	38,90+810,793 9024 d
Уран	257,43	—15,10	261,62—554,913 0000 d
Нептун	295,33	40,65	107,21+468,750 0000 d
Плутон	311,63	4,18	252,66+56,364 0000 d

Если угол W увеличивается, то планета имеет прямое вращение, если уменьшается — обратное.

В общем случае для некоторго момента времени t величины α_0, δ_0 и W представляют в виде полиномов:

$$\alpha_0 = a_0 + a_1 T + a_2 \sin(a_3 + a_4 T) + \ldots;$$
$$\delta_0 = b_0 + b_1 T + b_2 \cos(b_3 + b_4 T) + \ldots; \qquad (657)$$
$$W = W_0 + \dot{W} d + c_2 \sin(c_3 + c_4 T) + \ldots,$$

где $T = \dfrac{\mathrm{JED}_t - \mathrm{JED}_{t_0}}{36\,525{,}0}$; $d = \mathrm{JED}_t - \mathrm{JED}_{t_0}$,

причем JED_{t_0} — юлианская эфемеридная дата начальной эпохи; $\dot{W}$ — угловая скорость вращения планеты; d — временной интервал в эфемеридных сутках.

Как уже было отмечено, положение нулевого меридиана закрепляется на поверхности планеты долготами характерных точек рельефа. Это возможно благодаря съемкам, выполненным с АМС, и построению по снимкам опорных сетей фототриангуляции.

МАС рекомендованы координаты северного полюса вращения и направления нулевого меридиана Солнца и планет (табл. 32).

§ 52. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ ЛУНЫ

Орбитальное движение Луны. Невозмущенное движение Луны вокруг Земли характеризуется шестью элементами кеплеровой орбиты: a — большая полуось; e — эксцентриситет; J — наклон к эклиптике; Ω — долгота восходящего узла; ω — аргумент перицентра; g_0 — средняя аномалия в начальную эпоху T_0.

Вследствие возмущений, вызванных притяжением Солнца, планет и несферичностью гравитационного поля Земли, элементы орбиты Луны испытывают значительные возмущения. Линия уз-

лов вращается в плоскости эклиптики таким образом, что долгота восходящего узла все время уменьшается в направлении, противоположном движению Луны по орбите. Это явление называется регрессией линии узлов. Полный оборот линия узлов совершает за 18,6 года. Долготу восходящего узла Луны в любой момент времени можно определить с помощью разложения Брауна:

$$\Omega = 259°10'59{,}79'' - 1\,934°08'31{,}23''T + \\ + 7{,}48''T^2 + 0{,}0080''T^3, \qquad (658)$$

где время отсчитывается в юлианских столетиях от эпохи 1900, янв. 0^h, (12^h ET) = JD 2 415 020,0.

Линия апсид (линия, соединяющая перигей и апогей лунной орбиты) также вращается в плоскости орбиты, в ту же сторону, что и Луна, совершающая полный оборот за 8,85 года.

Аргумент перицентра Луны определяется выражением

$$\omega = 75°08'46{,}61'' + 6003°10'33{,}75''T - 44{,}65''T^2 - 0{,}053''T^3, \qquad (659)$$

и отсчитывается от той же эпохи что и долгота узла.

Не остаются постоянными наклон орбиты к эклиптике J и эксцентриситет орбиты e. Наклон орбиты испытывает периодические колебания с периодом 18,6 года и изменяется в пределах от 4°59′ до 5°17′. Эксцентриситет также меняется с периодом 8,85 года в пределах 0,0432÷0,0666.

Реальная скорость движения Луны по орбите тоже не точно соответствует рассчитанной по второму закону Кеплера вследствие возмущений.

Таким образом, Луна в своем движении вокруг Земли описывает не эллипс, а весьма сложную пространственную кривую.

Описание движения Луны на основе гравитационной теории с учетом всех возмущений является одной из наиболее трудных задач небесной механики. Поэтому рассмотрим лишь некоторые окончательные результаты, необходимые для понимания задачи космического фотографирования Луны. По формулам невозмущенного движения имеем:

среднее движение Луны

$$n_{\mathbb{C}} = \frac{2\pi}{T}, \qquad (660)$$

где T — период обращения Луны;

средняя аномалия Луны

$$g = g_0 + n_{\mathbb{C}}(t - T_0); \qquad (661)$$

эксцентрическая аномалия

$$E - e\sin E = g; \qquad (662)$$

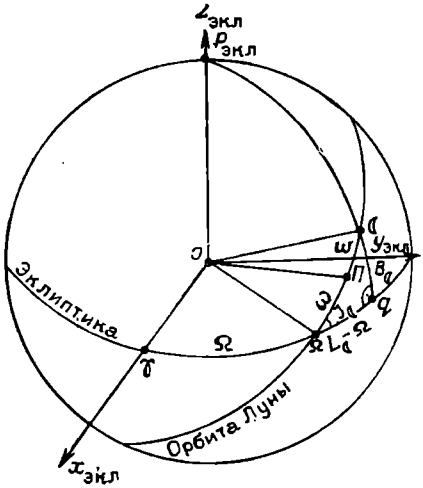

Рис. 32. Эклиптические координаты Луны

истинная аномалия Луны

$$\operatorname{tg}\frac{w}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}. \qquad (663)$$

Эклиптические геоцентрические координаты. Рассмотрим эклиптику, орбиту Луны и некоторые ее элементы (рис. 32). $O_\oplus x_э y_э z_э$ — геоцентрическая эклиптическая система координат, начало которой в центре масс Земли, ось $x_э$ направлена в точку весеннего георавноденствия γ, ось $z_э$—в полюс эклиптики, $B_☾$ и $L_☾$ — геоцентрические широта и долгота Луны, символом ☾ обозначено мгновенное положение Луны на геоцентрической единичной сфере.

Из сферического прямоугольного треугольника $\Omega ☾ q$ получим формулы для геоцентрических координат Луны, выраженных через элементы невозмущенной орбиты Луны:

$$\sin B_☾ = \sin J \sin(\omega + w),$$
$$\operatorname{tg}(L_☾ - \Omega) = \cos J \operatorname{tg}(\omega + w), \qquad (664)$$

или

$$L_☾ = \Omega + \operatorname{arctg}[\cos J \operatorname{tg}(\omega + w)]. \qquad (665)$$

При этом величины $L_☾ - \Omega$ и $\omega + w$ всегда находятся в одной четверти.

Из-за малости угла J ($J \approx 5{,}1°$) разность $(L_☾ - \Omega) - (\omega + w)$ никогда не превышает 2,5°, поэтому геоцентрическую долготу $L_☾$ вычисляют по формуле

$$L_☾ = \Omega + (\omega + w) + \Sigma f(w + w, J), \qquad (666)$$

где $\Sigma f(w+w, J)$ — сумма малых периодических членов. Широта Луны никогда не превосходит угла наклона J, поэтому ее тоже представляют в виде быстро сходящегося тригонометрического ряда.

Наконец, третьей полярной координатой Луны является ее геоцентрический радиус-вектор, величина которого определяется выражением

$$R_☾ = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos w}. \qquad (667)$$

Расстояние Луны от Земли характеризуется также горизонтальным параллаксом Луны

$$\pi_{\mathbb{C}} = \arcsin\frac{r_{\oplus}}{R_{\mathbb{C}}} = \arcsin\frac{r_{\oplus}(1+e\cos w)}{a(1-e^2)}, \tag{668}$$

где $r_{\oplus}$ — экваториальный радиус Земли.

Прямоугольные геоцентрические эклиптические координаты Луны вычисляют по формулам:

$$\begin{aligned} x_{\mathbb{C}} &= R_{\mathbb{C}}\cos B_{\mathbb{C}}\cos L_{\mathbb{C}} = \frac{r_{\oplus}}{\sin\pi_{\mathbb{C}}}\cos B_{\mathbb{C}}\cos L_{\mathbb{C}};\\ y_{\mathbb{C}} &= R_{\mathbb{C}}\cos B_{\mathbb{C}}\sin L_{\mathbb{C}} = \frac{r_{\oplus}}{\sin\pi_{\mathbb{C}}}\cos B_{\mathbb{C}}\sin L_{\mathbb{C}}. \qquad (669)\\ z_{\mathbb{C}} &= R_{\mathbb{C}}\sin B_{\mathbb{C}} = \frac{r_{\oplus}}{\sin\pi_{\mathbb{C}}}\sin B_{\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

Земля с Луны и Луна с Земли проецируются в противоположные точки небесной сферы, поэтому в эклиптической системе координат с началом в центре Луны селеноцентрические координаты Земли равны геоцентрическим координатам Луны, но с обратным знаком, т. е.

$$\begin{pmatrix} x_{\oplus} \\ y_{\oplus} \\ z_{\oplus} \end{pmatrix}_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} -x_{\mathbb{C}} \\ -y_{\mathbb{C}} \\ -z_{\mathbb{C}} \end{pmatrix}_{\oplus}. \tag{670}$$

Брауном была разработана теория интегрирования дифференциальных уравнений возмущенного движения Луны, в которой возмущенные координаты Луны представлены в виде тригонометрических рядов.

Предварительно вводятся вспомогательные величины l, l' D и F, зависящие от времени следующим образом:

$$\begin{aligned} l &= 296^\circ 06' 16{,}59'' + 477\,198^\circ 50' 56{,}79''T + \\ &+ 33{,}09''T^2 + 0{,}052''T^3; \\ l' &= 358^\circ 28' 33{,}00'' + 35\,999^\circ 02' 59{,}10''T - 0{,}54''T^2 - 0{,}012''T^3; \qquad (671)\\ D &= 350^\circ 44' 14{,}95'' + 445\,267^\circ 06\,51{,}18''T - 5{,}17''T^2 + 0{,}007''T^3; \\ F &= 11^\circ 15' 03{,}20'' + 483\,202^\circ 01' 30{,}54''T - 11{,}56''T^2 - 0{,}001''T^3. \end{aligned}$$

В выражениях (671) аргумент T вычисляют точно так же, как в формуле (658).

Возмущенные эклиптические геоцентрические координаты Луны $B_{\mathbb{C}}$, $L_{\mathbb{C}}$ и $\sin\pi_{\mathbb{C}}$ в теории Брауна выражаются в виде тригонометрических рядов, членами которых являются произведения линейных комбинаций величин l, l', D и F на почти постоянные коэффициенты.

Линейные комбинации аргументов Брауна можно представить в следующем виде:

$$\alpha_i = p_i l + q_i l' + r_i D + s_i F, \tag{672}$$

где p_i, q_i, r_i, $s_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

Тогда разложения Брауна будут следующими:

$$L_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} + \sum_1^n a_i \sin\alpha_i;$$

$$B_{\mathbb{C}} = \sum_1^n b_i \sin\alpha_i; \tag{673}$$

$$\sin\pi_{\mathbb{C}} = \sum_1^n c_i \cos\alpha_i.$$

В этих разложениях $\mathbb{C}$ — средняя долгота Луны, которая возрастает почти линейно и определяется по формуле

$$\mathbb{C} = 270°26'02{,}99'' + 481\,267°52'59{,}32''T -$$

$$-4{,}08''T^2 + 0{,}0068''T^3, \tag{674}$$

где a_i, b_i, c_i — коэффициенты.

При составлении таблиц Браун ограничился следующими значениями величин p, q, r и s: $|p| \leqslant 6$; $|q| \leqslant 4$; $|r| \leqslant 8$; $|s| \leqslant 5$, но и в этом случае необходимо выполнение очень большого объема вычислений.

В настоящее время координаты Луны вычисляют только на ЭВМ, при этом теория Брауна почти не претерпела изменений; вместо среднего солнечного времени используется динамическое время, а к средней долготе была добавлена эмпирическая поправка $-8{,}72''-26{,}74''T-11{,}22''T^2$.

В разложения координат Луны $B_{\mathbb{C}}$, $L_{\mathbb{C}}$ и $\sin\pi_{\mathbb{C}}$ входят периодические члены, вызванные эллиптичностью орбиты Луны и точно соответствующие законам Кеплера при невозмущенном движении. Все остальные периодические и вековые члены являются следствиями возмущений в движении Луны и называются неравенствами.

Оптическая либрация Луны является следствием неравномерности движения Луны и наличия угла между ее экватором и орбитой. Оптическая либрация — периодические колеба-

ния Луны относительно направления из ее центра к наблюдателю на Земле. Она проявляется в небольших перемещениях деталей видимой поверхности Луны по ее диску.

Селеноцентрическая динамическая система координат. Теория вращения Луны предполагает, что Луна представляет собой абсолютно твердое тело.

Через центр масс тела можно провести множество прямых, относительно каждой из которых определяется момент инерции тела в виде

$$J_0 = \sum_1^n m_i r_i^2,$$

где $m_i r_i^2$ — сумма произведений масс элементарных частиц на квадраты их расстояний от центра масс.

Осевые моменты инерции (моменты инерции относительно координатных осей) представляют собой сумму произведений масс частиц твердого тела на квадраты расстояний до осей x, y, z:

$$A = \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2); \quad B = \sum_{i=1}^n m_i (z_i^2 + x_i^2);$$

$$C = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2).$$

Центробежным моментом инерции тела относительно какой-либо пары координатных осей называют сумму произведений масс всех точек тела на произведение их координат по этим осям, т. е.

$$D = \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i; \quad E = \sum_{i=1}^n m_i z_i x_i; \quad F = \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i.$$

В механике доказывается, что для каждой точки абсолютно твердого тела существует эллипсоид инерции

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Ezx - 2Fxy = 1,$$

при этом если некоторая точка O является центром масс, то эллипсоид инерции является центральным.

Этому уравнению можно придать более простой вид, если выбрать за оси координат оси самого центрального эллипсоида инерции. Они называются главными осями инерции тела в данной точке O, тогда

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

Главные оси инерции, проходящие через центр масс тела, называют главными центральными осями инерции, а моменты инерции по этим осям — главными моментами инерции и обозначают A, B и C.

Вращение Луны полностью определяется вращением трехгранника (триэдра), образованного ее главными осями инерции. Устойчивое вращение Луны происходит вокруг оси, близкой к наименьшей оси эллипсоида инерции (оси наибольшего момента инерции).

Оси инерции ортогональны, поэтому их удобно считать осями декартовой системы, жестко связанной с телом Луны. Эта система координат называется системой осей инерции или динамической селеноцентрической системой координат. Тело Луны по форме тоже можно считать трехосным эллипсоидом, поэтому эту систему называют также системой осей фигуры.

Ось $X_{\mathbb{C}}$ направлена к Земле и совмещена с осью момента A, ось $Z_{\mathbb{C}}$ направлена к северному полюсу Луны и совмещена с осью момента C; ось $Y_{\mathbb{C}}$ совмещена с осью момента B так, что система координат правая.

Плоскость, проходящая через оси $X_{\mathbb{C}}$ и $Y_{\mathbb{C}}$, является экватором фигуры, а полярная ось $Z_{\mathbb{C}}$ — осью фигуры. Точки пересечения оси фигуры с поверхностью называются полюсами фигуры.

Рассмотренная динамическая система координат $OX_{\mathbb{C}}Y_{\mathbb{C}}Z_{\mathbb{C}}$ является основной селеноцентрической системой координат, именно она определена международными соглашениями по исследованию Луны как единая селеноцентрическая система координат.

Законы Кассини. В 1693 г. Кассини сформулировал три закона, характеризующих вращение Луны. В современной формулировке, с учетом введенных определений, эти законы состоят в следующем.

I закон. Плоскость экватора фигуры Луны (динамический экватор) наклонена на постоянный угол $I_{\mathbb{C}}$ к плоскости эклиптики.

II закон. Ось эклиптики $Z_{\text{экл}}$, ось лунной орбиты $Z_{\text{орб}}$ и ось фигуры Луны $Z_{\mathbb{C}}$ лежат в одной плоскости и расположены так, что ось эклиптики находится между двумя другими. Как следует из второго закона Кассини, узлы орбиты и экватора фигуры Луны на эклиптике совпадают, причем долгота нисходящего узла экватора равна долготе восходящего узла орбиты (рис. 33). Обе эти долготы обозначаются одинаково Ω.

III закон. Луна вращается с постоянной угловой скоростью.

Это вращение происходит против часовой стрелки (если смотреть с северного полюса Луны $P_{\mathbb{C}}$) вокруг оси, сохраняющей неизменным свое направление в теле Луны. Время полного оборота вокруг оси равняется сидерическому месяцу, т. е. промежутку времени между двумя одинаковыми последовательными положениями Луны среди звезд. Средняя продолжительность сидерического месяца 27 сут 7 ч 43 мин 11,5 с.

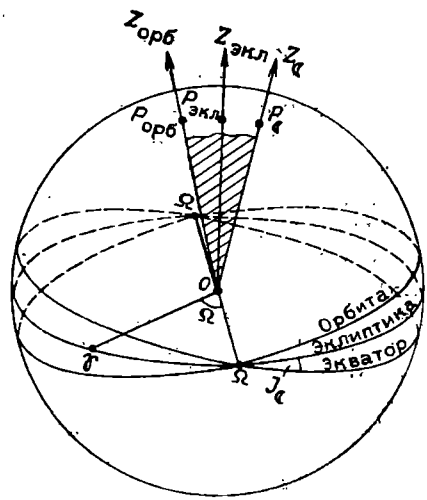

Рис. 33. Орбита, эклиптика и экватор Луны

Законы Кассини близки к реальности, но, вследствие возмущающего гравитационного влияния Луны и Солнца, выполняются лишь приближенно. Гравитационные возмущения от Земли и Солнца вызывают малые колебания Луны относительно ее среднего положения, и это явление называется физической либрацией Луны.

Законы Кассини справедливы в средней системе динамических координат, ей соответствует система осей Кассини, оси инерции в этом идеализированном случае образуют триэдр Кассини.

Заметим, что если оптическая либрация является чисто перспективным явлением, обусловленным взаимным положением наблюдателя на Земле и областей лунной поверхности, то физическая либрация является действительными малыми колебаниями Луны относительно триэдра Кассини, которые необходимо учитывать при вычислении истинных динамических координат точек поверхности Луны.

Физическая либрация Луны. В теории вращения Луны вводятся величины

$$\alpha = \frac{C-B}{A}; \quad \beta = \frac{C-A}{B}; \quad \gamma = \frac{B-A}{C}, \tag{675}$$

которые называются динамическими сжатиями Луны. В формулах (675) A, B и C — главные моменты инерции Луны.

Особое значение в теории вращения Луны имеет динамический параметр Луны f, который определяется по формуле

$$f = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{B(C-B)}{A(C-A)}. \tag{676}$$

Динамический параметр f и угол наклона $J_{\mathbb{C}}$ экватора Кассини к эклиптике позволяют определить величины отклонений от законов Кассини при вращении Луны.

Величина f для Луны много раз была вычислена различными методами, тем не менее все результаты разбросаны в пределах от 0,5 до 0,9. В АЕ принято значение $f=0{,}73$, которое получено Гайном еще в 1914 г. (к сожалению, это наиболее достоверный результат). Для $J_{\mathbb{C}}$ принято значение $J_{\mathbb{C}}=1°32'20''$.

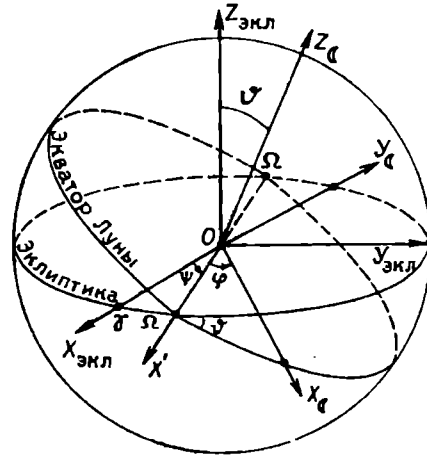

Рис. 34. Эйлеровы углы ψ, ϑ, φ

Переход от эклиптических координат к динамическим (селенографическим) $X_{\mathbb{C}}$, $Y_{\mathbb{C}}$, $Z_{\mathbb{C}}$, заданным триэдром осей инерции Луны, выполняют при помощи трех эйлеровых углов ψ, ϑ и φ (рис. 34), а именно в результате трех поворотов: вокруг оси $Z_{экл}$ на угол ψ; вокруг оси X' на угол ϑ; вокруг оси $Z_{\mathbb{C}}$ на угол φ. Таким образом, преобразование имеет вид:

$$\begin{pmatrix} X_{\mathbb{C}} \\ Y_{\mathbb{C}} \\ Z_{\mathbb{C}} \end{pmatrix} = \Pi_{\varphi}^{z}(\Pi_{\vartheta}^{x})^{\mathrm{T}}\Pi_{\psi}^{z}\begin{pmatrix} X_{экл} \\ Y_{экл} \\ Z_{экл} \end{pmatrix}. \tag{677}$$

Эйлеровы углы ψ, ϑ и φ определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \psi &= \Omega + \sigma; \\ \vartheta &= J_{\mathbb{C}} + \rho; \\ \varphi &= (180° + \mathbb{C} - \psi) + \tau = (180° + \mathbb{C} - \Omega - \sigma) + \tau, \end{aligned} \tag{678}$$

где σ, ρ и τ — компоненты физической либрации Луны в долготе узла, наклоне и в угле φ.

Переход от инерциальных геоцентрических координат x, y, z к динамическим селеноэкваториальным (селенографическим) координатам $X_{\mathbb{C}}$, $Y_{\mathbb{C}}$ и $Z_{\mathbb{C}}$

1. Для определения компонент физической либрации σ, ρ и τ вычисляют среднюю долготу перигея Солнца Г, используя выра-

жение

$$\Gamma = 281{,}220\,833\,3^\circ + 1{,}719\,175\,0^\circ T + 0{,}452\,777\,8^\circ \times$$
$$\times 10^{-3} T^2 + 0{,}333\,333\,3^\circ \cdot 10^{-5} T^3; \qquad (679)$$

среднюю долготу Солнца

$$L_\odot = 279{,}696\,677\,8^\circ + 36\,000{,}768\,925^\circ T +$$
$$+ 0{,}302\,500\,0^\circ \cdot 10^{-3} T^2; \qquad (680)$$

среднюю долготу восходящего узла Ω орбиты Луны

$$\Omega = 259{,}183\,275\,0^\circ - 1\,934{,}142\,008\,3^\circ T +$$
$$+ 0{,}207\,777\,78^\circ \cdot 10^{-2} T^2 + 0{,}222\,222\,2 \cdot 10^{-5} T^3; \qquad (681)$$

среднюю геоцентрическую долготу Луны

$$\mathbb{C} = 270{,}434\,163\,9^\circ + 481\,267{,}883\,141\,7^\circ T -$$
$$- 0{,}113\,333\,3^\circ \cdot 10^{-2} T^2 + 0{,}188\,888\,89 \cdot 10^{-5} T^3; \qquad (682)$$

средний наклон эклиптики к экватору

$$\varepsilon = 23{,}452\,294\,44^\circ - 0{,}130\,125\,00^\circ \cdot 10^{-1} T -$$
$$- 0{,}163\,888\,89^\circ \cdot 10^{-5} T^2 + 0{,}502\,777\,78^\circ \cdot 10^{-6} T^3. \qquad (683)$$

В формулах (639)—(643) аргумент T определяется по формуле

$$T = \frac{\mathrm{JD}\,(t) - 2\,415\,020{,}0}{36\,525}. \qquad (684)$$

Далее вычисляют:

среднюю аномалию Солнца

$$M_\odot = L_\odot - \Gamma; \qquad (685)$$

среднюю аномалию Луны

$$M_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} - \Gamma'; \qquad (686)$$

угловое расстояние перигея Солнца от узла лунной орбиты

$$\omega = \Gamma' - \Omega; \qquad (687)$$

угловое расстояние перигея Луны от узла ее орбиты

$$\omega' = \Gamma - \Omega, \qquad (688)$$

где $\Gamma' = 334{,}329\,555\,6^\circ + 4\,069{,}043\,033\,3^\circ T - 0{,}103\,250\,00^\circ \cdot 10^{-1} T^2 -$
$- 0{,}125\,000\,00^\circ \cdot 10^{-4} T^3$.

2. Находят компоненты τ, ρ, σ физической либрации Луны:

$$\tau = -12{,}9''\sin M_{\mathbb{C}} + 65{,}2''\sin M_{\odot} + 9{,}7''\sin 2\omega' + 7{,}3''\sin 2(M_{\odot} - \omega' + \omega) + 7{,}6''\sin\Omega;$$

$$\rho = -106''\cos M_{\mathbb{C}} + 35''\cos(M_{\mathbb{C}} + 2\omega') - 11''\cos 2(M_{\mathbb{C}} + \omega'); \quad (689)$$

$$\sigma\sin I_{\mathbb{C}} = -180''\sin M_{\mathbb{C}} + 35''\sin(M_{\mathbb{C}} + 2\omega') - 11''\sin 2(M_{\mathbb{C}} + \omega'),$$

где $I_{\mathbb{C}} = 1°32'20''$.

3. Для перехода от средних инерциальных геоэкваториальных координат к средним динамическим селеноэкваториальным полагают:

$$a = I_{\mathbb{C}}; \quad b = \varepsilon; \quad c = \Omega, \quad (690)$$

а для перехода от истинных инерциальных геоэкваториальных координат к истинным динамическим селеноэкваториальным

$$a = I_{\mathbb{C}} + \rho; \quad b = \varepsilon; \quad c = \Omega + \sigma. \quad (691)$$

Кроме того, в этом случае долготу восходящего узла Ω Луны исправляют за нутацию в долготе $\Delta\psi$. Вычисляют углы поворота θ, φ и вспомогательный угол Δ по формулам:

$$\cos\theta = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos c;$$

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta};$$

$$\cos\varphi = \frac{\cos a\sin b - \sin a\cos b\cos c}{\sin\theta};$$

$$\sin\varphi = -\frac{\sin a\sin c}{\sin\theta}; \quad (692)$$

$$\cos\Delta = \sin a\cos b - \cos a\sin b\cos c;$$

$$\sin\Delta = -\frac{\sin b\sin c}{\sin\theta}.$$

Для перехода от средних инерциальных геоэкваториальных координат к средним динамическим селеноэкваториальным принимают

$$\psi = \Delta + \mathbb{C} - \Omega; \quad (693)$$

а для перехода к истинным селеноэкваториальным

$$\Delta\psi = \Delta + (\overline{\mathbb{C}} + \tau) - (\Omega + \sigma). \quad (694)$$

Элементами матрицы $\Pi_{\mathbb{C}}$ перехода от инерциальных геоэкваториальных координат к динамическим селеноэкваториальным являются следующие:

$$
\begin{aligned}
p_{11} &= \cos\varphi\cos\psi - \cos\theta\sin\varphi\sin\psi;\\
p_{12} &= \sin\varphi\cos\psi + \cos\theta\cos\varphi\sin\psi;\\
p_{13} &= \sin\psi\sin\theta;\\
p_{21} &= -\sin\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi\cos\psi;\\
p_{22} &= -\sin\psi\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi\cos\psi;\\
p_{23} &= \sin\theta\cos\psi;\\
p_{31} &= \sin\varphi\sin\theta;\\
p_{32} &= -\cos\varphi\sin\theta;\\
p_{33} &= \cos\theta.
\end{aligned}
\qquad (695)
$$

Пусть теперь заданы инерциальные геоэкваториальные координаты x', y', z' объекта и Луны $x'_{\mathbb{C}}$, $y'_{\mathbb{C}}$, $z'_{\mathbb{C}}$, которые уже приведены к одному и тому же экватору и равноденствию, например к эпохе 1950,0. Тогда вычисляют разности

$$\bar{x}' = x' - x'_{\mathbb{C}};\quad \bar{y}' = y' - y'_{\mathbb{C}};\quad \bar{z}' = z' - z'_{\mathbb{C}}. \qquad (696)$$

После этого определяют динамические селеноцентрические координаты объекта:

$$\begin{bmatrix} X_{\mathbb{C}} \\ Y_{\mathbb{C}} \\ Z_{\mathbb{C}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y}' \\ \bar{z}' \end{bmatrix}. \qquad (697)$$

Установление нулевого меридиана динамической селеноцентрической (селенографической) системы координат. Для Луны нулевой меридиан динамической селеноцентрической системы определяется осью эллипсоида инерции Луны, направленной в сторону Земли. Эта ось, в свою очередь, является пересечением плоскости лунного меридиана, проходящего через истинные полюсы вращения Луны и центр масс Земли, с плоскостью лунного экватора в тот момент времени, когда средняя эклиптическая долгота Луны равна средней долготе восходящего узла лунной орбиты на эклиптике.

Как видим, это определение довольно сложно, и поэтому на практике положение деталей лунной поверхности определяют путем привязки к объектам лунной поверхности с известными полярными динамическими (селенографическими) координатами — селенографической долготой $\lambda_0 = \frac{Y_{\mathbb{C}_0}}{X_{\mathbb{C}_0}}$ и селено-

графической широтой

$$\beta_0 = \frac{Z_{\mathbb{C}_0}}{\sqrt{X^2_{\mathbb{C}0} + Y^2_{\mathbb{C}0}}}.$$

Таким объектом на поверхности Луны выбран небольшой кратер Mösting *A*, инерциальные геоэкваториальные координаты которого α и δ публикуются в специальной эфемериде в АЕ. Селенографические широта и долгота кратера Mösting *A* $\beta_0 = -3°11'02''$; $\lambda_0 = -5°10'07''$.

Необходимо отметить, что положения объектов в луноцентрической динамической системе координат не зависят от оптической и физической либраций Луны. Если же положения объектов определять в геоэкваториальной луноцентрической системе координат, которую можно получить параллельным переносом осей геоцентрической инерциальной системы координат в новое начало — центр масс Луны, то в уравнениях движения объекта следует учитывать физическую либрацию Луны.

§ 53. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ЛУННОЙ КОСМИЧЕСКОЙ ФОТОГРАММЕТРИИ

Задача построения селеноцентрической системы координат в настоящее время является весьма актуальной для изучения космического пространства и системы Земля — Луна.

До появления искусственных спутников Луны построение селенодезических сетей осуществлялось путем обработки фотографий Луны, выполненных в земных обсерваториях, а также в результате весьма тонких и сложных непосредственных телескопических наблюдений. К сожалению, даже в наше время при наличии совершенных телескопов и их установке в условиях оптимального астроклимата наименьшие размеры различимых с Земли элементов лунных деталей составляют около одного километра в центре лунного диска. По мере приближения к краю (лимбу) Луны возрастает размер различимых деталей и, кроме того, возникает сильное перспективное искажение их формы. Это потребовало разработки дополнительных методов и приспособлений для устранения искажений, связанных с краевой зоной и оптической либрацией, в частности, было использовано фотографирование Луны на шар. Тем не менее, несмотря на совершенство методов и технологии наблюдений, точность координат пунктов селенодезических сетей, полученных путем наземных наблюдений, была невысокой.

Положение радикальным образом изменилось после запуска советских и американских автоматических лунных станций. Советская АМС «Зонд-7» совершила в 1969 г. облет Луны с возвращением на Землю и доставила цветные фотографии Луны и Земли

с различных расстояний. Американские АМС «Лунар — Орбитер» после промежуточных коррекций выходили на лунную орбиту с первоначальными высотами апоселения 200 км и переселения 1850 км. После нескольких суток подготовки к фотосъемке была уменьшена высота переселения до 50 км. На каждом аппарате имелся запас пленки длиною 80 м на 210 кадров. В результате было выполнено крупномасштабное фотографирование почти всей поверхности Луны. После экспозиции пленка обрабатывалась на борту, негативы считывались и телевизионные изображения передавались на Землю.

Эти материалы явились основой для построения первых космических фототриангуляций Луны.

Построение единой селеноцентрической системы координат, отвечающей по своей точности современным требованиям селенодезии и практической космонавтики,— сложная комплексная проблема. Советскими и американскими учеными совместно разработаны принципы создания такой системы.

В качестве единой селеноцентрической системы координат принята динамическая система $OX_{\mathbb{C}}\, Y_{\mathbb{C}}\, Z_{\mathbb{C}}$. Эта система должна строиться с помощью различных видов измерений:

наземной телескопической съемки Луны на фоне звезд;

фотографической съемки Луны и синхронной съемки звезд с космических аппаратов;

бортовых измерений дальности от космического аппарата до физической поверхности Луны с фиксацией на изображении поверхности точки пересечения луча измерителя с Луной;

наземных траекторных измерений, проводимых командно-измерительным комплексом в процессе слежения за космическим аппаратом;

лазерной локации уголковых отражателей, установленных на поверхности Луны

и других доступных данных, например, наблюдений покрытий звезд Луной, интерферометрии с большой базой.

Уравнения коллинеарности в лунной космической фотограмметрии. Закрепим динамическую селеноцентрическую систему координат, зафиксировав в некоторый момент T_0 направления ее осей относительно звезд. Тогда получим невращающуюся селеноцентрическую динамическую систему координат $O_{\mathbb{C}}X'_{\mathbb{C}}Y'_{\mathbb{C}}Z'_{\mathbb{C}}$.

В этой системе координат описывается движение искусственных спутников Луны.

Пусть вектор

$$\bar{r}_{ij} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ -f_t \end{pmatrix}_{ij} \qquad (698)$$

представляет собой вектор положения j-й точки поверхности Луны в момент t_i в системе координат топографической камеры. Введя нормировку, получим соответствующий ему единичный вектор $\bar{r}^0_{ij}$, равный

$$\bar{r}^0_{ij} = \frac{1}{|\Delta_{ij}|}\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ -f_t \end{pmatrix}_{ij}, \tag{699}$$

где $\Delta_{ij} = \sqrt{\tilde{x}_j^2 + \tilde{y}_j^2 + f_t^2}$.

Располагая каталогом звезд, в котором положения звезд заданы в инерциальной геоцентрической системе координат $O_\oplus xyz$, а также снимком звездного неба, полученным одновременно со снимком лунной поверхности, определим направление на точку j в момент t_i в инерциальной геоцентрической системе координат $O_\oplus xyz$:

$$\bar{r}^{0\prime}_{ij} = \frac{1}{|\Delta_{ij}|}\Pi_i{}^*\Pi_0\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ -f_t \end{pmatrix}_{ij}. \tag{700}$$

Для перехода к вращающейся динамической селеноэкваториальной системе координат подействуем на вектор $\bar{r}^{0\prime}_{ij}$ матрицей $\Pi^{\mathbb{C}}_i$, элементы которой определяются формулами (695). Тогда направление $\bar{R}^0_{ij}$ на точку j в спутникоцентрической динамической селеноэкваториальной системе получим из выражения

$$\bar{R}^0_{ij} = \frac{1}{|\Delta_{ij}|}\Pi^{\mathbb{C}}_i\Pi_i^*\Pi_0\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ -f_t \end{pmatrix}_{ij}. \tag{701}$$

В результате интегрирования дифференциальных уравнений движения искусственного спутника Луны определяется вектор $\bar{R}_i'$ положения центра проектирования топографической камеры в момент t_i в невращающейся динамической селеноэкваториальной системе координат, зафиксированной на момент T_0, т. е.

$$\bar{R}'_{i\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} X'_{i\mathbb{C}} \\ Y'_{i\mathbb{C}} \\ Z'_{i\mathbb{C}} \end{pmatrix}. \tag{702}$$

Для того чтобы получить положение искусственного спутника Луны во вращающейся динамической селеноэкваториальной системе координат $O_{\mathbb{C}}X_{\mathbb{C}}Y_{\mathbb{C}}Z_{\mathbb{C}}$, в которой определено спутникоцентрическое направление $\bar{R}^0_{ij}$, необходимо выполнить два преобразования координат:

перейти от невращающейся системы $O_{\mathbb{C}}X'_{\mathbb{C}}Y'_{\mathbb{C}}Z'_{\mathbb{C}}$ к системе селеноцентрических эклиптических координат $O_{\mathbb{C}}x_{\text{э}}y_{\text{э}}z_{\text{э}}$ в момент фотографирования t_i;

перейти от селеноцентрической эклиптической системы $O_{\mathbb{C}}x_{\text{э}}y_{\text{э}}z_{\text{э}}$ к вращающейся динамической селеноэкваториальной системе координат $O_{\mathbb{C}}x_{\text{э}}y_{\text{э}}z_{\text{э}}$ в момент t_i.

Таким образом, получим

$$\bar{R}_{i\mathbb{C}} = \Pi_i^{\text{э}\mathbb{C}}\Pi_i^{\text{э}}\begin{pmatrix} X'_{i\mathbb{C}} \\ Y'_{i\mathbb{C}} \\ Z'_{i\mathbb{C}} \end{pmatrix}, \tag{703}$$

где $\Pi_i^{\text{э}}$ — матрица перехода от невращающейся динамической селеноэкваториальной системы координат к селеноцентрической эклиптической системе координат; $\Pi_i^{\text{э}\mathbb{C}}$ — матрица перехода от селеноцентрической эклиптической системы координат к вращающейся динамической селеноэкваториальной системе координат.

В любой момент времени селеноцентрический вектор поверхности Луны $\bar{R}_{j\mathbb{C}}$, селеноцентрический вектор искусственного спутника Луны $\bar{R}_{i\mathbb{C}}$ и спутникоцентрический вектор $\bar{R}_{ij\mathbb{C}}$ точки поверхности связаны основным уравнением

$$\bar{R}_{ij\mathbb{C}} = \bar{R}_{j\mathbb{C}} - \bar{R}_{i\mathbb{C}}. \tag{704}$$

При этом предполагают, что все три вектора заданы в динамической селеноэкваториальной системе координат $O_{\mathbb{C}}X_{\mathbb{C}}Y_{\mathbb{C}}Z_{\mathbb{C}}$.

Подставив в выражение (704) значение единичного спутникоцентрического вектора $\bar{R}^0_{ij\mathbb{C}}$, определяемого формулой (701), получим

$$|\,R_{ij\mathbb{C}}\,|\,\bar{R}^0_{ij\mathbb{C}} = |\,\bar{R}_{ij\mathbb{C}}\,|\,\frac{1}{|\,\Delta_{ij}\,|}\,\Pi_i^{\mathbb{C}}\,\Pi_i^{*}\Pi_0\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ -f_t \end{pmatrix}_{ij} = \bar{R}_{j\mathbb{C}} - \bar{R}_{i\mathbb{C}}. \tag{705}$$

Введем обозначения

$$\Pi_i = (\Pi_i^{\mathbb{C}} \Pi_i^{*} \Pi_j)^{\mathrm{T}}; \quad \frac{1}{m_i} \frac{|\Delta_{ij}|}{|\bar{R}_{ij\mathbb{C}}|}. \tag{706}$$

Тогда уравнение (701) получим в виде

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ -f_t \end{pmatrix}_{ij} = \frac{1}{m_i} \Pi_i \begin{pmatrix} X_{j\mathbb{C}} - X_{i\mathbb{C}} \\ Y_{j\mathbb{C}} - Y_{i\mathbb{C}} \\ Z_{j\mathbb{C}} - Z_{i\mathbb{C}} \end{pmatrix} \tag{707}$$

или, исключив масштабный коэффициент $1/m_i$, в форме уравнений коллинеарности:

$$\begin{aligned} x_{ij} &= -f_t \frac{a_{11}(X_{j\mathbb{C}} - X_{i\mathbb{C}}) + a_{12}(Y_{j\mathbb{C}} - Y_{i\mathbb{C}}) + a_{13}(Z_{j\mathbb{C}} - Z_{i\mathbb{C}})}{a_{31}(X_{j\mathbb{C}} - X_{i\mathbb{C}}) + a_{32}(Y_{j\mathbb{C}} - Y_{i\mathbb{C}}) + a_{33}(Z_{j\mathbb{C}} - Z_{i\mathbb{C}})}; \\ y_{ij} &= -f_t \frac{a_{21}(X_{j\mathbb{C}} - X_{i\mathbb{C}}) + a_{22}(Y_{j\mathbb{C}} - Y_{i\mathbb{C}}) + a_{23}(Z_{j\mathbb{C}} - Z_{i\mathbb{C}})}{a_{31}(X_{j\mathbb{C}} - X_{i\mathbb{C}}) + a_{32}(Y_{j\mathbb{C}} - Y_{i\mathbb{C}}) + a_{33}(Z_{j\mathbb{C}} - Z_{i\mathbb{C}})}, \end{aligned} \tag{708}$$

где a_{ik} — элементы матрицы Π_i. Таким образом, получены уравнения коллинеарности, связывающие координаты $\tilde{x}_j$ и $\tilde{y}_j$ изображения точки лунной поверхности на топографическом снимке с ее динамическими селеноэкваториальными координатами $X_{j\mathbb{C}}$, $Y_{j\mathbb{C}}$, $Z_{j\mathbb{C}}$. и координатами центра фотографирования $X_{i\mathbb{C}}$, $Y_{i\mathbb{C}}$, $Z_{i\mathbb{C}}$. Эти уравнения являются исходными при построении сетей космической фототриангуляции на поверхности Луны. Уравнивание сети космической лунной фототриангуляции выполняется на основании формул, приведенных в главе VII.

Особенности построения сетей космической фототриангуляции на Луне. Если развивать на поверхности Луны обычные сети фототриангуляции, включающие в качестве неизвестных только координаты пунктов и элементы ориентирования снимков, то в результате можно получить единую систему координат, жестко связанную с Луной, но с произвольными началом и масштабом, а также ориентацией во внешнем пространстве. При включении в фототриангуляцию динамических уравнений движения искусственного спутника Луны, а также траекторных измерений, выполненных с Земли, становятся возможными масштабирование сети и определение положения пунктов фототриангуляции в системе координат, связанной с центром масс Луны. Точность масштабирования и селеноцентрической системы координат целиком зависит от точности установленных к настоящему времени значений постоянных, характеризующих гравитационное поле Луны и закономерности ее вращения.

Существенна также точность теории движения Луны. Ошибки динамических селеноэкваториальных координат звезд, а следовательно, и точность ориентации сетей лунной фототриангуляции в полной мере зависят от ошибок в значении угла $J_{\mathbb{C}}$ между осью эклиптики и полярной осью триэдра Кассини и динамического параметра f вращения Луны.

Разброс СКО наиболее точных определений угла $J_{\mathbb{C}}$, выполненных с 1914 по 1958 г., составляет 54″ при среднем значении $J_{\mathbb{C}_{ср}} = 1°32'36''$.

Численные значения различных определений f вообще распадаются на две группы, для первой из которых $f_{1ср}=0{,}59$, а для второй — $f_{2ср}=0{,}77$.

Суммарное влияние ошибок определения $J_{\mathbb{C}}$ и f может привести к ошибкам порядка 1,4′ в положении звезды на селеноэкваториальной небесной сфере.

При вычислении свободных членов уравнений поправок в космической фототриангуляции Луны, построенной орбитальным методом, возникают неустранимые ошибки, связанные с недостаточной изученностью гравитационного поля Луны. Структура гравитационного поля Луны значительно сложнее, чем гравитационного поля Земли, что объясняется существованием локальных концентраций масс (масконов). Действие масконов вызывает изменения высоты спутника, достигающие 60—100 м относительно предвычисленной орбиты. Когда спутник приближается к области концентрации масс, его скорость возрастает, но после пролета маскона притяжение этой массы уже тормозит движение.

Все это позволяет сделать вывод о том, что создание космических фототриангуляций Луны требует комплексных исследований Луны и использования всех видов измерений. Это в конечном итоге позволит построить единую систему селеноцентрических координат, ориентировать и расположить ее в инерциальном пространстве, уточнить параметры вращения Луны и ее гравитационное поле.

Получение и обработка снимков Луны. Аппаратура для фотографирования Луны представляет собой сложный комплекс автоматических устройств, в который входит фотографическая и фототелевизионная аппаратура.

В качестве примера рассмотрим фотоустановку КК «Лунар — Орбитер» (рис. 35). В состав этой системы входят две фотокамеры, которые осуществляют фотографирование на одну и ту же пленку, устройство для обработки фотопленки и сканирующее устройство. При фотографировании с высоты примерно 50 км двумя камерами с фокусным расстоянием 80 и 610 мм обеспечивается высокое разрешение лунной поверхности — соответственно 8 и 1 м. Площадь поверхности, захватываемой первой камерой, со-

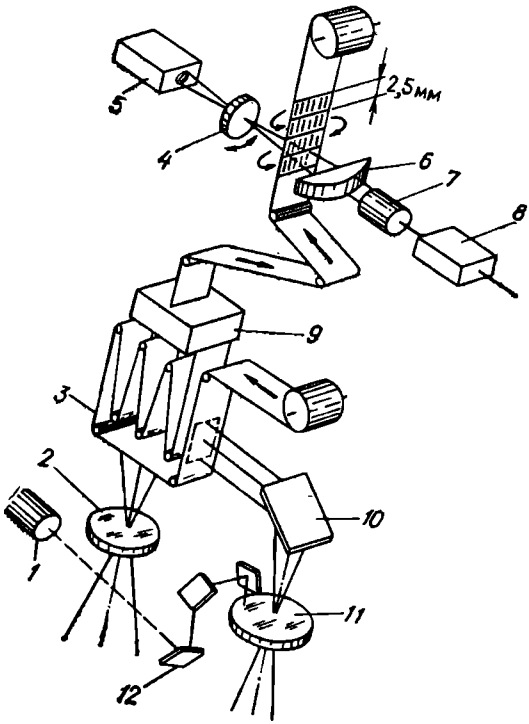

Рис. 35. Схема установки для фотографирования Луны

ставляет 31,6+37,4 км. Снимки, полученные второй камерой, служили для определения удобных мест прилунения.

Принцип работы фотоустановки заключается в следующем. Объектив *2* первой камеры строит изображение на пленке *3* непосредственно, а объектив второй камеры *11* — посредством зеркала *10*. Через объектив *11* и систему зеркал *12* световой поток поступает на датчик *1*, который вырабатывает электрические сигналы для осуществления компенсации сдвига изображения. Компенсация достигается перемещением пленки в момент фотографирования. После экспонирования пленка поступает в устройство проявления *9*, где она прижимается к слою желатины, которая пропитана проявочно-фиксирующим раствором и в результате проявляется и фиксируется. Затем пленка сушится и поступает в считывающее устройство. Оно состоит из устройства строчной развертки *5*, сканирующей линзы *4*, фокусирующей линзы *6*, фотоумножителя *7* и усилителя 8. Считывание изображения выполняется путем просвечивания пленки узким световым лучом диаметром 5 мкм. За 20 с луч проходит на пленке полосу шириной 2,5 мм, после чего пленка смещается на 2,5 мм и т. д. Для просмотра двух снимков, полученных с помощью обеих камер, требуется 40 мин.

Световой поток, который прошел сквозь пленку, модулируется пропорционально плотности почернения пленки и фокусируется линзой *6* на фотокатоде фотоумножителя *7*. Электрические сигналы, возникающие на выходе фотоумножителя, поступают в усилитель *8*, а затем подаются в передающее устройство и транслируются на Землю. На Земле изображение воспроизводится на экране кинескопа и затем снова фотографируется на фотопленку.

В процессе считывания, передачи изображений на Землю и приема наземной телевизионной системой происходят значитель-

ные искажения, которые называют электронной дисторсией.

Для восстановления геометрии исходных изображений на прижимное стекло фотокамеры с очень высокой точностью наносят сетку крестов. На изображениях, которые воспроизводятся на Земле телевизионной системой, кресты, вследствие электронной дисторсии, сдвинуты. Следовательно, измеренные координаты крестов x_k' и y_k' не совпадают с их точными значениями x_k и y_k. Разности координат крестов сетки $\Delta x_k = x_k - x_k'$ и $\Delta y_k = y_k - y_k'$ являются характеристиками искажений фотоизображения в районе каждого креста.

Для исправления координат точек фотоизображений используют интерполяционные полиномы третьей степени:

$$\Delta x_k = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy + a_4 x^2 + a_5 y^2 + a_6 x^3 + a_7 x^2 y + a_8 xy^2 + a_9 y^3;$$

$$\Delta y_k = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 xy + b_4 x^2 + b_5 y^2 + b_6 x^3 + b_7 x^2 y + b_8 xy^2 + b_9 y^3. \qquad (709)$$

В некоторых случаях используют полиномы второй степени или системы ортогональных полиномов.

Для определения двадцати коэффициентов, входящих в уравнения (709), необходимо измерить, по крайней мере, координаты десяти крестов. В общем случае задача решается по способу наименьших квадратов. Измеряют координаты всех крестов на фотоизображении и составляют уравнения поправок для каждого i-го креста:

$$\Delta x_{ki} - (x_{ki} - x_{ki}') = v_{xi};$$

$$\Delta y_{ki} - (y_{ki} - y_{ki}') = v_{yi} \qquad (710)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

где величины Δx_{ki} и Δy_{ki} определяются формулами (669). В результате решения двух систем n нормальных уравнений определяют коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1 \ldots$ и выполняют оценку точности.

Подставляя значения коэффициентов в уравнения поправок (710), вычисляют поправки в координаты крестов. Поправки в измеренные координаты точек снимка можно получить, интерполируя поправки крестов. После введения поправок в координаты точек снимка его обработку выполняют по методике, принятой для обычных космических фотоснимков.

ПРИЛОЖЕНИЕ. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ МАТРИЦ

Основные формулы и определения

1. Матрицей размером $m \times n$ называется прямоугольная таблица произвольных чисел следующего вида:

$$\underset{(m,\,n)}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}].$$

2. Матрица называется вектором-строкой при $m=1$ и вектором-столбцом при $n=1$.

3. Если $m=n$, то такая матрица называется квадратной. Квадратная матрица $\underset{(n,\,n)}{\mathrm{A}} = [a_{ij}]$, в которой все $a_{ij}=0$ при $i \neq j$, диагональная. Диагональная матрица, в которой все $a_{ii}=1$, будет единичной и обозначается $\underset{(n\,n)}{\mathrm{E}}$. Если $m=1$ и $n=1$, то такая матрица является скаляром. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой.

4. Если поменять местами строки и столбцы матрицы $\underset{(m,\,n)}{\mathbf{A}}$, то полученная матрица называется транспонированной и обозначается $\underset{(n,\,m)}{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}}$. При этом, по определению, $a_{ij}^{\mathrm{T}} = a_{ji}$.

5. Матрицу называют симметрической, если $\mathbf{A}=\mathbf{A}$, т. е. $a_{ij}=a_{ji}$. Матрица называется кососимметрической, если $a_{ij}=-a_{ji}$.

6. Суммой двух матриц $\underset{(m,\,n)}{\mathrm{A}}$ и $\underset{(m,\,n)}{\mathrm{B}}$ одинакового размера называется матрица $\underset{(m,\,n)}{\mathbf{C}} = \underset{(n,\,n)}{\mathbf{A}} + \underset{(n,\,n)}{\mathbf{B}}$,

$$\underset{(m,\,n)}{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}.$$

7. Произведением $\alpha \underset{(m,\,n)}{\mathbf{A}}$ матрицы $\underset{(m,\,n)}{\mathbf{A}}$ на число α называется матрица

$$\alpha \underset{(m,\,n)}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

8. Произведением матрицы $\underset{(m,\,n)}{\mathbf{A}}$ на матрицу $\underset{(n,\,r)}{\mathbf{B}}$ является матрица $\underset{(m,\,r)}{\mathbf{C}} = \underset{(m,\,n)}{\mathbf{A}}\,\underset{(n,\,r)}{\mathbf{B}}$, каждый элемент c_{ij} которой, расположенный в ij-й клетке, равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы $\underset{(m,\,n)}{\mathbf{A}}$ на соответствующие элементы j-го столбца матрицы $\underset{(n,\,r)}{\mathbf{B}}$, т. е.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{j1} + a_{i2}b_{j2} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Умножение матриц допустимо (произведение существует), если число столбцов матрицы $\underset{(m,\,n)}{\mathrm{A}}$ равно числу строк $\underset{(n,\,r)}{\mathbf{B}}$, т. е. если матрицы согласуются по форме.

Например,

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \frac{2\cdot 1+0\cdot 2+3\cdot 4+1\cdot 3}{} & \frac{2\cdot 3+0\cdot 1+3\cdot 0+1\cdot 5}{} \\ \hline \frac{5\cdot 1+1\cdot 2+2\cdot 4+0\cdot 3}{} & \frac{5\cdot 3+1\cdot 1+2\cdot 0+0\cdot 5}{} \\ \hline \frac{0\cdot 1+0\cdot 2+4\cdot 4+1\cdot 3}{} & \frac{0\cdot 3+0\cdot 1+4\cdot 0+1\cdot 5}{} \end{array}\right]$$

В общем случае при матричном умножении $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

Если же выполняется равенство $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, то матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ называются перестановочными или коммутирующими.

9. Квадратная матрица $\mathbf{A}$ называется неособенной, если определитель $\det \underset{(n,\,n)}{\mathbf{A}}$, составленный из ее элементов, отличен от нуля. В противном случае матрица является особенной или сингулярной.

10. Для неособенной квадратной матрицы $\underset{(n,\,n)}{\mathbf{A}}$ существует обратная матрица $\underset{(n,n)}{\mathbf{A}^{-1}}$, такая, что $\underset{(n,\,n)}{\mathbf{A}^{-1}}\,\underset{(n,\,n)}{\mathbf{A}} = \underset{(n,\,n)}{\mathbf{E}}$. Причем

$$\underset{(n,\,n)}{\mathbf{A}^{-1}} = \frac{1}{\det \underset{(n,\,n)}{\mathbf{A}}} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix},$$

где A_{ij} — алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы $\underset{(n,\,n)}{\mathbf{A}}$ и $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$; M_{ij} — миноры определителя $\det \underset{(n,\,n)}{\mathbf{A}}$. Так, если дан определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

то минор M_{11}, соответствующий элементу a_{11}, получается вычеркиванием первого столбца и первой строки, на пересечении которых находится элемент a_{11}. Таким образом,

$$M_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; \quad A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11}.$$

11. Квадратная матрица $\mathbf{A}$ называется ортогональной, если ее обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$ совпадает с транспонированной $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, т. е.

$$\underset{(n,\,n)}{\mathbf{A}} = \underset{(n,\,n)}{\mathbf{A}^{-1}}.$$

Для элементов ортогональной матрицы справедливы равенства:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j;$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2 = 1 \quad \text{при} \quad i = j.$$

Определитель ортогональной матрицы $\det \mathbf{A} = \pm 1$. Ортогональную матрицу называют также версором или оператором поворота.

12. Основные матричные соотношения:

$\alpha \mathbf{A} = \mathbf{A} \alpha$;

$\mathbf{A0} = \mathbf{0}$;

$\mathbf{EA} = \mathbf{AE} = \mathbf{A}$;

$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$;

$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$;

$(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}$;

$(\mathbf{A}^{-1})^{-1}=\mathbf{A}$;

$(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}}=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$;

$(\mathbf{AB})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

13. Свойство блочных матриц.
Пусть матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ разделены на блоки

$$\mathbf{A}=\left|\begin{array}{c|c} Q_{11} & Q_{12} \\ \hline Q_{21} & Q_{22} \end{array}\right| \quad \text{и} \quad \mathbf{B}=\left|\begin{array}{c|c} S_{11} & S_{12} \\ \hline S_{21} & S_{22} \end{array}\right|.$$

Тогда

$$\mathbf{AB}=\left[\begin{array}{c|c} Q_{11}S_{11}+Q_{12}S_{21} & Q_{11}S_{12}+Q_{12}S_{22} \\ \hline Q_{21}S_{11}+Q_{22}S_{21} & Q_{21}S_{12}+Q_{22}S_{22} \end{array}\right].$$

14. Леммы об обращении матриц:

$$\mathbf{KB}^{\mathrm{T}}(\mathbf{BKB}^{\mathrm{T}}+\mathbf{R})^{-1}=(\mathbf{K}^{-1}+\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{-1};$$

$$(\mathbf{K}^{-1}+\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B})^{-1}=\mathbf{K}-\mathbf{KB}^{\mathrm{T}}(\mathbf{BKB}^{\mathrm{T}}+\mathbf{R})^{-1}\mathbf{BK}.$$

15. Пусть $\mathbf{Q}=[q_{ij}]$ — симметрическая матрица. Квадратичной формой $\mathbf{W}$ называется выражение

$$\mathbf{W}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}q_{ij}y_iy_j.$$

Квадратичную форму можно записать в виде матричного произведения

$$\mathbf{W}=\bar{\mathbf{Y}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\bar{\mathbf{Y}},$$

где $\bar{\mathbf{Y}}$ — вектор-столбец.

16. Если для всех компонент вектора $\bar{\mathbf{Y}}$, не равных нулю,

$$\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{QY}>0,$$

то матрица $\mathbf{Q}$ и квадратичная форма называются положительно определенными. Если $\mathbf{Q}$ — положительно определенная, а $\mathbf{B}$ — неособенная матрица, то матрица $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{QB}$ также определена положительно.

17. Симметрическая матрица $\mathbf{Q}$ может быть приведена к диагональной форме с помощью некоторого ортогонального преобразования, т. е. существует ортогональная матрица $\mathbf{F}$ такая, что

$$\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{QF}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{bmatrix}.$$

18. Квадратная матрица **A** в степени p имеет следующий вид:

$$\underbrace{\mathbf{AA}\ldots\mathbf{A}}_{p}=\mathbf{A}^{p}.$$

Квадратная матрица в нулевой степени равна единичной матрице, т. е. $\mathbf{A}^0=\mathbf{E}$. Например,

$$\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

19. Формула обращения матрицы размера 2×2:

$$\underset{(2,\,2)}{\mathbf{M}^{-1}}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}d/D&-b/D\\-c/D&a/D\end{bmatrix},$$

где $D=ad-bc$.

20. Формула обращения матрицы размера 3×3 имеет вид

$$\underset{(3,\,3)}{\mathbf{M}^{-1}}=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&k\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}A&B&C\\D&E&F\\G&H&K\end{bmatrix},$$

где $\Delta=aek+bfg+cdh-afh-dbk-gec$;

$A=(ek-fh)$; $B=-(bk-ch)$; $C=(bf-ce)$;

$D=-(dk-fg)$; $E=(ak-cg)$; $F=-(af-cd)$;

$G=(dh-eg)$; $H=-(ah-bg)$; $K=(ae-bd)$.

21. Формулы обращения симметрической матрицы размера 3×3:

$$\underset{(3,\,3)}{\mathbf{M}^{-1}}=\begin{bmatrix}a&b&c\\b&e&f\\c&f&k\end{bmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}A&B&C\\B&E&F\\C&F&K\end{bmatrix},$$

где $\Delta=aek+2bcf-af^2-b^2k-c^2e$;

$A=(ek-f^2)$; $B=-(bk-cf)$; $C=(bf-ce)$;

$E=(ak-c^2)$; $F=-(af-bc)$; $K=(ae-b^2)$.

Элементы теории корреляционных (ковариационных) матриц. *Случайный вектор, его математическое ожидание и ковариационная матрица.*

Из теории вероятностей известно, что плотность распределения вероятностей одномерной нормальной случайной величины $\tilde{x}$ выражается формулой

$$P(x) = \sqrt{\frac{a}{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}(x-b)^2 a}, \tag{1}$$

где a — положительное число; b — некоторое произвольное число.

Математическое ожидание $M(\tilde{x})$ случайной величины $\tilde{x}$ равно числу b:

$$M(\tilde{x}) = b = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x)\, dx. \tag{2}$$

Дисперсия (второй центральный момент) $D(\tilde{x})$ равна a^{-1}, т. е.

$$D(\tilde{x}) = M[(\tilde{x} - b)^2] = a^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-b)^2 p(x)\, dx. \tag{3}$$

Пусть для некоторой случайной величины $\tilde{x}$ заданы дисперсия $D(\tilde{x})$ и математическое ожидание $M(\tilde{x})$, тогда плотность распределения случайной величины $\tilde{x}$ можно представить в виде

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi D\tilde{x})}}\, e^{\frac{-\frac{1}{2}(\tilde{x}-M(\tilde{x})^2)}{D(\tilde{x})}} \tag{4}$$

Среднее квадратическое отклонение (СКО) $\sigma_{\tilde{x}} = \sqrt{D(\tilde{x})}$.

Введем понятие случайного вектора $\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}$.

Случайным вектором

$$\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}_0 = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)^T \tag{5}$$

называется такой вектор, каждая компонента которого $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n$ является случайной величиной.

Если каждая компонента случайного вектора распределена по нормальному закону, то случайный вектор называется нормальным.

Случайные векторы используют при решении задач совокупностей случайных величин.

Пусть, например, имеется N топографических снимков, ориентированных в инерциальном пространстве и разбитых на k групп. Будем определять вектор начальных условий движения ИСЗ $\mathbf{X}_0 = (x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)^T$ независимо по каждой из 1, 2, ..., k групп снимков. Тогда из-за совместного действия ряда случайных факто-

ров численные значения компонент вектора начальных условий $\bar{X}_0$ будут следующими: $\bar{X}_{01}, \bar{X}_{02}, \ldots, \bar{X}_{0k}$ для $1, 2, \ldots, k$ групп снимков. Они являются возможными реализациями случайного вектора $\bar{X}_0$.

По аналогии с выражением (1) плотность распределения случайного нормального вектора $\tilde{\bar{X}}$ размерности n имеет вид

$$p(\bar{X}) = \sqrt{\frac{\det A}{(2\pi)^n}}\, e^{-\frac{1}{2}(\bar{X}-\bar{b})^T A (\bar{X}-\bar{b})}. \tag{6}$$

В этом выражении $\underset{(n,n)}{A}$ — симметрическая и положительно определенная матрица; $\bar{b}$ — n-мерный вектор-столбец, который играет роль математического ожидания вектора $\tilde{\bar{X}}$,

$$M(\tilde{\bar{X}}) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \bar{X} p(\bar{X})\, dx_1 \ldots dx_n. \tag{7}$$

Сумму всех вторых центральных моментов компонент случайного вектора $\tilde{\bar{X}}$ представим в виде симметрической матрицы

$$K_{\bar{X}} = \begin{vmatrix} M[(\tilde{x}_1 - b_1)^2] & & \\ M[(\tilde{x}_2 - b_2)(\tilde{x}_1 - b_1)] & & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ M[(\tilde{x}_n - b_n)(\tilde{x}_1 - b_1)] & & \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} M[(\tilde{x}_1 - b_1)(\tilde{x}_2 - b_2)] & \ldots & M[(\tilde{x}_1 - b_1)(\tilde{x}_n - b_n)] \\ M[(\tilde{x}_2 - b_2)^2] & \ldots & M[(\tilde{x}_2 - b_2)(\tilde{x}_n - b_n)] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ M[(\tilde{x}_n - b_n)(\tilde{x}_2 - b_2)] & \ldots & M[(\tilde{x}_n - b_n)^2] \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Матрица $\underset{(n,n)}{K_{\bar{X}}}$, составленная из всех вторых центральных моментов случайного вектора $\tilde{\bar{X}}$, называется ковариационной, а также корреляционной или дисперсионной. Корреляционную матрицу $K_{\bar{X}}$ можно рассматривать и как математическое ожидание случайной матрицы

$$(\tilde{\bar{X}} - \bar{b})(\tilde{\bar{X}} - \bar{b})^T \tag{9}$$

При этом примем, что каждый элемент случайной матрицы является случайной величиной. Тогда имеем

$$K_{\bar{X}} = M[(\tilde{\bar{X}} - \bar{b})(\tilde{\bar{X}} - \bar{b})^T]. \tag{10}$$

В теории вероятностей доказывается следующая теорема. Если плотность распределения случайного вектора $\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}$ определяется формулой (6), то его математическое ожидание равно вектору $\bar{\mathbf{b}}$, т. е.

$$M(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}) = \bar{\mathbf{b}}, \tag{11}$$

а корреляционная матрица этого вектора равна $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{K}_{\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}} = \mathbf{A}^{-1}. \tag{12}$$

Из этой теоремы следует, что если для случайного вектора $\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}$ заданы вектор его математического ожидания $\bar{M}(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}})$ (n-мерный вектор) и корреляционная матрица $\mathbf{K}_{\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}}$ (положительно определяется), то плотность распределения случайного вектора $\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}$ будет иметь вид

$$p(\bar{\mathbf{X}}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \mathbf{K}_{\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}}}} e^{-\frac{1}{2}(\bar{\mathbf{X}} - \bar{\mathbf{M}}(\bar{\mathbf{X}}))^{\mathrm{T}} \mathbf{K}_{\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}}^{-1} (\bar{\mathbf{X}} - \mathbf{M}(\bar{\mathbf{X}}))}. \tag{13}$$

При этом положительная определенность матрицы $\mathbf{K}_{\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}}$ следует из положительной определенности матрицы $\mathbf{A}$ и равенства (12).

Пусть задан случайный вектор $\bar{\mathbf{X}}$, имеющий размерность n. Представим этот вектор в виде двух векторов $\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}_1$ и $\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}_2$ размерностей p и q так, что $p+q=n$.
Тогда получим

$$\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_p \\ \hline \tilde{x}_{p+1} \\ \tilde{x}_{p+2} \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}_1 \\ \hline \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \} p \\ \hline \} q \end{matrix}. \tag{14}$$

При таком представлении случайного вектора $\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}$ корреляционные матрицы векторов $\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}_1$ и $\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}_2$ будут блоками корреляционной матри-

цы вектора $\tilde{\bar{\mathbf{X}}}$:

$$\mathbf{K}_{\bar{\mathbf{X}}} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K}_{\bar{\mathbf{X}}_1} & \mathbf{K}_{\bar{\mathbf{X}}_1 \bar{\mathbf{X}}_2} \\ \hline \mathbf{K}_{\bar{\mathbf{X}}_1 \bar{\mathbf{X}}_2} & \mathbf{K}_{\bar{\mathbf{X}}_2} \end{array}\right], \tag{15}$$

причем $\mathbf{K}_{\bar{\mathbf{X}}_1 \bar{\mathbf{X}}_2} = \mathbf{K}^{\mathrm{T}}_{\bar{\mathbf{X}}_2 \bar{\mathbf{X}}_1}$.

Блоки $\mathbf{K}_{\bar{\mathbf{X}}_1 \bar{\mathbf{X}}_2}$ и $\mathbf{K}_{\bar{\mathbf{X}}_2 \bar{\mathbf{X}}_1}$ называются корреляционными матрицами связи случайных векторов $\bar{\mathbf{X}}_1$ и $\bar{\mathbf{X}}_2$. Если векторы $\tilde{\bar{\mathbf{X}}}_1$ и $\tilde{\bar{\mathbf{X}}}_2$ независимы и нормально распределены, то матрицы связи (моменты связи) равны нулю. В этом случае

$$\mathbf{K}_{\bar{\mathbf{X}}} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K}_{\bar{\mathbf{X}}_1} & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{K}_{\bar{\mathbf{X}}_2} \end{array}\right]. \tag{16}$$

Таким образом, в многомерном случае корреляционная матрица играет роль дисперсии, а матрица связи — роль момента связи.

Нормированная корреляционная матрица.

На практике часто возникает необходимость в установлении степени зависимости компонент случайного вектора $\tilde{\bar{\mathbf{X}}}$. В этом случае необходимо выполнить нормирование корреляционной матрицы.

Пусть задана корреляционная матрица $\mathbf{K}_{\bar{\mathbf{X}}}$ размера $n \times n$.

$$\underset{(n,\,n)}{\mathbf{K}_{\bar{\mathbf{X}}}} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}. \tag{17}$$

При нормировании каждый момент связи k_{ij} делят на величины СКО, в результате чего получают нормированную корреляционную матрицу вида

$$\underset{(n,\,n)}{\mathbf{K}^0_{\bar{\mathbf{X}}}} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{k_{12}}{\sqrt{k_{11}k_{22}}} & \dots & \dfrac{k_{1n}}{\sqrt{k_{11}k_{nn}}} \\ \dfrac{k_{21}}{\sqrt{k_{11}k_{22}}} & 1 & \dots & \dfrac{k_{2n}}{\sqrt{k_{22}k_{nn}}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{k_{n1}}{\sqrt{k_{nn}k_{11}}} & \dfrac{k_{n2}}{\sqrt{k_{nn}k_{22}}} & \dots & 1 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Недиагональными элементами r_{ij} матрицы $\mathbf{K}^0_{\bar{X}}$ будут следующие:

$$|\, r_{ij} \,| = \left| \frac{k_{ij}}{\sqrt{k_{ii}k_{ij}}} \right|, \tag{19}$$

они называются коэффициентами корреляции.

Максимальное значение $|r_{ij}|=1$ коэффициент корреляции приобретает только в том случае, если компоненты x_i и x_j связаны функционально линейной зависимостью

$$x_i=ax_j+b,$$

где a и b — постоянные величины.

Операцию нормирования можно представить в матричной форме:

$$\mathbf{K}^0_{\overline{\mathbf{X}}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{k_{11}}} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{k_{22}}} & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{k_{nn}}}\end{bmatrix};\times$$

$$\times\mathbf{K}^0_{\overline{\mathbf{X}}}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{k_{11}}} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{k_{22}}} & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{k_{nn}}}\end{bmatrix}. \qquad (20)$$

Теперь корреляционную матрицу $\mathbf{K}_{\overline{\mathbf{X}}}$ можно выразить через нормированную корреляционную матрицу $\mathbf{K}^0_{\overline{\mathbf{X}}}$, СКО ($\sigma_i=\sqrt{k_{ii}}$) и коэффициент корреляции $|r_{ij}|$:

$$\mathbf{K}_{\overline{\mathbf{X}}_i}=\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \sigma_n\end{bmatrix}\mathbf{K}^0_{\overline{\mathbf{X}}}\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \sigma_n\end{bmatrix} \qquad (21)$$

или

$$\mathbf{K}_{\overline{\mathbf{X}}}=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & r_{12}\sigma_1\sigma_2 & \ldots & r_{1n}\sigma_1\sigma_n\\ r_{21}\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 & \ldots & r_{2n}\sigma_2\sigma_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ r_{n1}\sigma_n\sigma_1 & r_{n2}\sigma_n\sigma_2 & \ldots & \sigma^2 n\end{bmatrix}. \qquad (22)$$

2. *Корреляционная матрица случайного вектора* $\tilde{\tilde{\mathbf{Z}}}$, *полученного в результате линейного преобразования случайного вектора* $\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}$Z.

Пусть даны линейное преобразование случайного вектора $\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}$ в форме

$$\tilde{\tilde{\mathbf{Z}}} = \mathbf{A}\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} \tag{23}$$

и корреляционная матрица $\mathbf{K}_{\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}}$ вектора $\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}$. Требуется определить корреляционную матрицу $\mathbf{K}_{\tilde{\tilde{\mathbf{Z}}}}$ вектора $\tilde{\tilde{\mathbf{Z}}}$.

Теорема. Если $\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}$ — нормальный случайный вектор с плотностью распределения (13) и над этим вектором осуществлено линейное преобразование (23), то в результате такого преобразования также получается случайный нормальный вектор с корреляционной матрицей $\mathbf{K}_{\tilde{\tilde{\mathbf{Z}}}}$.

$$\mathbf{K}_{\tilde{\tilde{\mathbf{Z}}}} = \mathbf{A}\mathbf{K}_{\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \tag{24}$$

и плотностью распределения

$$p(\tilde{\tilde{\mathbf{Z}}}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \mathbf{K}_{\tilde{\tilde{\mathbf{Z}}}}}}\, e^{-\frac{1}{2}(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \mathrm{M}(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}))^{\mathrm{T}} \mathbf{K}_{\tilde{\tilde{\mathbf{Z}}}}^{-1} (\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \mathrm{M}(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}))}$$

Ортогональное преобразование в фотограмметрии и его корреляционная матрица.

Пусть в пространстве изображения задан вектор $\bar{\mathbf{r}}_0$ в виде

$$\bar{\mathbf{r}}_0 = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ -f \end{pmatrix}, \tag{25}$$

где $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ — измеренные координаты точки снимка; f — фокусное расстояние камеры.

Предположим, что корреляционная матрица $\mathbf{K}_{\bar{\mathbf{r}}_0}$ вектора $\bar{\mathbf{r}}_0$ имеет диагональную форму

$$\mathbf{K}_{\bar{\mathbf{r}}_0} = \begin{bmatrix} \sigma^2_{\tilde{x}} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2_{\tilde{y}} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_f^2 \end{bmatrix}, \tag{26}$$

Если над вектором $\bar{r}_0$ осуществлено ортогональное преобразование

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \Pi \bar{r}_0, \tag{27}$$

то в соответствии с формулой (24) корреляционная матрица $K_{\bar{R}}$ будет иметь вид

$$K_{\bar{R}} = \Pi K_{\bar{r}_0} \Pi^T. \tag{28}$$

При этом, если $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_f^2$, то в силу ортогональности матрицы Π

$$K_{\bar{R}} = K_{\bar{r}_0}. \tag{29}$$

Следовательно, если координаты $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ точки снимка и фокусное расстояние f определены равноточно, то корреляционная матрица не зависит от преобразования координат.

Среднее квадратическое отклонение проекции случайного вектора на заданное направление.

Пусть заданы случайный вектор $\bar{X}$ и его корреляционная матрица $K_{\bar{X}}$, а также некоторое направление в виде вектора $\bar{R}_0$. Требуется определить СКО проекции случайного вектора $\bar{X}$ на направление $\bar{R}_0$.

Проекция $\bar{Y}$ случайного вектора $\bar{X}$ на направление $\bar{R}_0$ является скалярным произведение этих векторов, т. е.

$$\bar{Y} = \bar{R}^{0T} X. \tag{30}$$

Тогда на основании формулой (24) получим

$$\sigma^2_{\bar{X}, \bar{R}^0} = K_{\bar{Y}} = \bar{R}^{0T} K_{\bar{X}} \bar{R}^0, \tag{31}$$

где $K_{\bar{X}}$ — корреляционная матрица вектора $\bar{X}$.

Примем в качестве вектора $\bar{R}^0$ орт $\bar{e}_1$ первого координатного вектора системы координат, в которой задана корреляционная матрица $K_{\bar{X}}$,

$$\bar{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0). \tag{32}$$

Если подставить e_1 в формулу (31), то получим, что

$$\sigma^2_{x_1} = k_{11}. \tag{33}$$

Далее, для остальных ортов

$$\bar{e}_2=(0,\ 1,\ 0,\ldots,\ 0);$$

$$\bar{e}_n=(0,\ 0,\ 0,\ldots,\ 1) \tag{34}$$

аналогично будем иметь

$$\sigma^2_{x_2}=k_{22};$$

$$\ldots\ldots$$

$$\sigma^2_{x_n}=k_{nn} \tag{35}$$

Таким образом, диагональные элементы корреляционной матрицы $\mathbf{K}_{\bar{X}}$ являются квадратами СКО проекции случайного вектора $\bar{X}$ на соответствующие оси системы координат, в которой задана корреляционная матрица.

Эллипсоид равных вероятностей.

На основании уравнения (13) можно сделать вывод, что плотность вероятности случайного вектора $\bar{X}$ сохраняет постоянное значение на некоторой поверхности второго порядка, определяемой уравнением

$$(\bar{X}-M(\bar{X}))^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{-1}_{\bar{X}}(\bar{X}-M(\bar{X}))=\varepsilon^2, \tag{36}$$

где ε — константа; $\mathbf{K}_{\bar{X}}$ — корреляционная матрица вектора $\bar{X}$.

Если осуществить параллельный перенос системы координат

$$\bar{X}^0=\bar{X}-M(\bar{X}), \tag{37}$$

то уравнение эллипсоида равных вероятностей в новой системе координат будет иметь вид

$$\bar{X}^{0\mathrm{T}}\mathbf{K}^{-1}_{\bar{X}}\bar{X}^0=\varepsilon^2. \tag{38}$$

Поскольку матрица $\mathbf{K}_{\bar{X}}$ определена положительно, то должно существовать ортогональное преобразование

$$\bar{Y}^0=\mathbf{C}\bar{X}^0, \tag{39}$$

при котором матрица $\mathbf{K}_{\bar{Y}}$ вектора $\bar{Y}^0$ диагональна т. е.

$$\mathbf{K}_{\bar{Y}}=\mathbf{B}\mathbf{K}_{\bar{X}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\sigma^2_{y_1} & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \sigma^2_{y_2} & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & \sigma^2_{y_n}\end{bmatrix}. \tag{40}$$

Строки матрицы $\mathbf{B}$ являются нормированными собственными векторами матрицы $\mathbf{K}_{\overline{X}}$, которые соответствуют ее собственным значениям (см. главу I), т. е.

$$\lambda_1 = \sigma^2_{y_1};\quad \lambda_2 = \sigma^2_{y_2};\ \ldots;\ \lambda_n = \sigma^2_{y_n}. \tag{41}$$

Точно так же с помощью матрицы $\mathbf{B}$ приводится к диагональному виду и обратная ковариационная матрица $\mathbf{K}^{-1}_{\overline{X}}$ вектора $\overline{\mathbf{X}}$, а именно:

$$\mathbf{B}\mathbf{K}^{-1}_{\overline{X}}\mathbf{B} = (\mathbf{B}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{K}^{-1}_{\overline{X}}\mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{B}\mathbf{K}_{\overline{X}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}})^{-1} = \mathbf{K}^{-1}_{\overline{Y}}. \tag{42}$$

Уравнение (38) в новой системе координат будет следующим:

$$\overline{\mathbf{Y}}^{0\mathrm{T}}\mathbf{K}^{-1}_{\overline{Y}}\overline{\mathbf{Y}}^{0} = \varepsilon^2, \tag{43}$$

которое в координатной форме имеет вид

$$\frac{y^{0\,2}_1}{\sigma^2_{y_1}} + \frac{y^{0\,2}_2}{\sigma^2_{y_2}} + \ldots + \frac{y^{0\,n}_n}{\sigma^2_{y_n}} = \varepsilon^2. \tag{44}$$

Уравнение (44) определяет эллиптическую поверхность. В зависимости от размерности n пространства, в котором задан случайный вектор $\overline{\mathbf{X}}$, различают следующие случаи:

$n=1$ — две точки с координатами $y^0=\pm\varepsilon\sigma_y$;

$n=2$ — эллипс с полуосями $\varepsilon\sigma_{y_1}$ и $\varepsilon\sigma_{y_2}$;

$n=3$ — эллипсоид с полуосями $\varepsilon\sigma_{y_1}$, $\varepsilon\sigma_{y_2}$, $\varepsilon\sigma_{y_3}$;

$n\geqslant 4$ — гиперэллипсоид с полуосями $\varepsilon\sigma_{y_1}$, $\varepsilon\sigma_{y_2}$, ..., $\varepsilon\sigma_{y_n}$.

В общем случае поверхность, определяемая уравнением (44), называется эллипсоидом равных вероятностей.

Если принять в этом уравнении $\varepsilon^2=1$, то получим эллипсоид СКО, описываемый уравнением

$$\overline{\mathbf{Y}}^{0\mathrm{T}}\mathbf{K}^{-1}_{\overline{Y}}\overline{\mathbf{Y}}^{0} = 1 \tag{45}$$

или в канонической форме

$$\frac{y^{0\,2}_1}{\sigma^2_{y_1}} + \frac{y^{0\,2}_2}{\sigma^2_{y_2}} + \ldots + \frac{y^{0\,2}_n}{\sigma^2_{y_n}} = 1. \tag{46}$$

Полуоси эллипсоида равны СКО по осям координат.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алабакин В. К.* Основы эфемеридной астрономии. — М.: Наука, 1979.
2. *Аксенов Е. П.* Теория движения искусственных спутников Земли. — М.: Наука, 1977.
3. *Использование* искусственных спутников Земли для построения геодезических сетей/ Е. Г. Бойко, Б. М. Кленицкий, И. М. Ландис и др. — М.: Недра, 1977.
4. *Картографирование* Луны и Марса. — М.: Недра, 1978.
5. *Космическая геодезия*/ В. Н. Баранов, Е. Г. Бойко, И. И. Краснорылов и др. — М.: Недра, 1986.
6. *Лобанов А. Н.* Фотограмметрия. —М.: Недра, 1984.
7. *Подобед В. В.* Фундаментальная астрометрия. М., Наука, 1968.
8. *Справочник* геодезиста/ Под ред. В. Д. Большакова и Г. П. Левчука. — 3-е изд. — М. Недра, 1985.
9. *Тюфлин Ю. С.* Космическая фотограмметрия при изучении планет и спутников. — М.: Недра, 1986.
10. *Куликов К. А., Гуревич В. Б.* Основы лунной астрометрии. — М.: Наука, 1972.
11. *Федоров Б. Ф., Пермяков В. Д.* Космическое фотографирование. — М., Недра, 1978.
12. *Урмаев М. С.* Орбитальные методы космической геодезии. — М.: Недра, 1981.
13. Фототриангуляция с применением электронной цифровой вычислительной машины /А. Н. Лобанов, Р. П. Овсянников, В. Б. Дубиновский и др. — М.: Недра, 1975.
14. Manual of Photogrammetry. Fourth Edition. American Society of Photogrammetry. Chapter XVIII. Satellite Photogrammetry. Author — Editor: Donald L. Light. 1980.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аберрация света 88
— годичная 88
— орбитальиая 88
— дифференциальная 208
Аномалия 111
— истинная 111
— средняя 118
— эксцентрическая 112
Апоцентр 111
Аргумент перицентра 58
— широты 114
Астрометрия фотографическая 207
Астронегатив 207

Базис космической съемки 172
Бинормаль 126

Вектор единичный 13
— -нормаль 16
Виток орбитальный 190
Внешнее ориентирование 96
— звездного снимка 89
— топографического снимка 59
Возмущения элементов орбит 124
— вековые 132
— долгопериодические 132
— короткопериодические 132
Вращение Земли суточное 50
Время аберрационное 218
— всемирное 51
— гринвичское 51
— звездное 51
— модифицированное 153

Гармоники геопотенциала зональные 130
— — тессеральные 133
Геопотенциал 129
Гипотеза 152
Гравитационное поле 130
Гравитационная постоянная 7
— — геоцентрическая 7
— — луноцентрическая 7

Дальномер лазерный 6
Дата юлианская 86
Движение возмущенное ИСЗ 124
— звезд собственное 85
— невозмущенное ИСЗ 111
— полюсов Земли 50
Двойное отношение 228
Деформация пленки 45
Дисторсия радиальная 44
— тангенциальная 44
— электронная 259
Долгота восходящего узла 58
— геодезическая 53
— селенографическая 251
Динамический параметр Луны 247

Законы Кеплера 111
— Ньютона 114
— таигенса

Интеграл энергии 116
Интегрирование уравнений движения аналитическое 137
— — — численное 138
— — — Адамса 140
— — — Коуэлла 140
— — — Рунге—Кутта 139
— — — Эверхарта 139
Интерполирование координат ИСЗ по Стирлингу 141
Итерация ньютоновская 103
— по истинной аномалии 153
— простая 118

Калибровка камеры звездной 96
— — топографической 96
Каталог звездный 49
— — FK-4 49
— —FK-5 49
— — SAOC 49
Кватернионы 33
— векторная часть 34
— скалярная часть 34

Компоненты вектора 12
— кватерниона 34
Координаты видимые звезд 84
— идеальные 208
— проективные 222
— динамические селеноцентрические 248
— эклиптические 248
Коэффициент аэродинамического сопротивления 135
— дисторсии 96

Лазерные измерения 61
Либрация оптическая 244
— физическая 247

Масштаб космической фототриангуляции 6
Матрица весовая 96
— диагональная 97
— единичная 25
— изохроных производных 192
— ковариационная 96
— нормальных уравнений 103
— обратная 103
— разреженная 201
— уравнений поправок 99
— характеристическая 25
Миграция фотослоя 45
Модель атмосферы 135
— движения ИСЗ 110
— — возмущенного 124
— — невозмущенного 115
Момент инерции 245
— осевой 245

Наклонение орбиты 58
Направляющие косинусы 13
Начальные условия движения 63
Нормирование вектора 12
— кватерниона 34
Нутация в долготе 86
— в наклоне 86

Обтюраторный затвор 207
Оператор взаимной ориентации звездного и топографического снимков 61
— ориентации звездного снимка 60
— ориентации топографического снимка 61
Оптический центр 208
Ориентация звездных снимков 89
— орбиты 113
— топографических снимков 89
Орты базисные 11
Оценка точности 76
— — априорная 76
— — направлений 76
Ошибка средняя квадратическая внешней ориентации снимка 103
— единицы веса 103
— направляющих косинусов 81
— спутникоцентрического направления 78

Параметры вращения 28
— дисторсии 44
— направляющие 17
— прецессионные 85
Период обращения ИСЗ 113
Перицентр орбиты 111
Плотность атмосферы 135
Поле гравитационное 128
Полуось орбиты 111
— эллипсоида 52
Преобразование аффинное 210
— гомографическое 210
— коллинеарное 210
— ортогональное 23
Прецессия 50
Прикладная рамка 42
Произведение векторное 16
— кватернионное 34
— скалярное 15
— скалярно-векторное 22
Прямое восхождение 48

Радиус-вектор 48
Редукция инерциальных координат 84
Референц-эллипсоид 52
Рефракция атмосферная 46
— дифференциальная 208
— внутренняя 77

Сжатие Земли 52
Симметрия осевая 129
Система координат геодезическая 52
— полярная 13
— геоцентрическая 48
— гринвичская 50
— инерциальная 48
— инструментальная 211

— проективная 223
— сиимка 42
— спутиикоцентрическая 59
— топоцентрическая 54
Склонеиие 48
След матрицы 26
Снимок звездный 60
— топографический 60
Сфера геоцентрическая 65
— единичная 65
— спутникоцентрическая 65

Тензор ошибок 78
Точка весеннего равнодеистиия 48
— главная снимка 42
— отраженного импульса 59
Трансверсаль 126
Триэдр подвижный 126

Углы ориентирующие 15
— Эйлера 28
Узел орбиты 57
— — восходящий 57
— — иисходящий 57
Уравнения дифференциальные движения
— Лагранжа 130
— — Ньютона 127
Уравиение
— Кеплера 118
— коллинеарности 67
— — линеаризованное 67
— нормальиое 103
— поправок 99
Ускорение кориолисово 202
— переносное 202
Условие компланариости 22
— — линеаризованное 181

Фокусное расстояние 42
Формулы Гаусса 146
— Ньютона 154
— Симпсона 137
Фототриангуляция космическая 190
Функция пертурбационная 130

Широта геодезическая 52

Эклиптика 242
Эксцентриситет орбиты 111
— эллипсоида 52
Элементы внешнего ориентирования 66
— виутреннего ориентироваиия 42
— орбиты 115
— оскулирующие 125
Эллипс орбитальный 112
Эллипсоид вращения 52
— общий земной 52
— МАС 52

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Введение 4

Глава I. Необходимые сведения из векториой алгебры и теории вращений 11

§ 1. Осиовные векторные операции в ортонормированном базисе 11
§ 2. Математическое описание вращений 23
§ 3. Представление элементов ортогональной матрицы через углы Эйлера 28
§ 4. Кватернионы и их использование в теории вращений . . . 33
§ 5. Представление элементов матрицы вращения через компоненты кватерниона 37
§ 6. Дифференциальные изменения координат, обусловленные бесконечно малыми изменениями эйлеровых углов 39

Глава II. Системы отсчета и фундаментальное уравиение космической фотограмметрии 42

§ 7. Система координиат снимка 42
§ 8. Инерциальная система координат 47
§ 9. Гринвичская система координат 50
§ 10. Геодезические системы координат 52
§ 11. Фундаментальное уравнеиие космической фотограмметрии 57
§ 12. Фундаментальное уравиение космической фотограмметрии в гринвичской системе координат 64
§ 13. Представлеиие фуидаментального уравиения космической фотограмметрии в виде уравнений коллииеарности 65
§ 14. Лиисаризация уравнений коллинеарности 67

Глава III. Определение спутиикоцентрических иаправлений иа точки поверхности планеты 76

§ 15. Априорная оценка точности определеиия спутникоцеитрических направлений 76
§ 16. Редукция иперциальных координат звезд на моменты фотографирования 84
§ 17. Прямые методы определения оператора ориентации звездного снимка в инерциальном пространстве 89
§ 18. Совместное определение элементов оператора ориентации звездиого снимка, элементов внутреннего ориентирования и параметров дисторсии 96
§ 19. Методы определеиия оператора взаимной ориентации звездного и топографического снимков 108

Глава IV. Элементы теории движения ИСЗ 110

§ 20. Уравнения движения ИСЗ 110
§ 21. Законы Кеплера 111
§ 22. Ориеитация плоскости орбитального эллипса в иперциальном пространстве 113
§ 23. Дифференциальные уравнения невозмущенного движеиия ИСЗ и их интегралы 114
§ 24. Вычисление координат и составляющих скорости при невозмущенном движении ИСЗ 118

§ 25. Возмущенное движение ИСЗ 124
§ 26. Возмущения, обусловленные отличием гравитационного поля Земли от центрального 128
§ 27. Возмущения, обусловленные торможением атмосферы . . 134
§ 28. Численные методы интегрирования уравнений движения ИСЗ 137

Глава V. Координатно-временная привязка точек космических снимков при известных начальных условиях ураанений движения ИСЗ . . . 140

§ 29. Интерполирование координат ИСЗ на момент фотографирования 140
§ 30. Вычисление гринвичских координат определяемой точки снимка 145

Глава VI. Определение начальных условий движения картографических ИСЗ по космическим снимкам 149

§ 31. Определение предварительной орбиты 149
§ 32. Дифференциальное уточнение орбиты ИСЗ 158
§ 33. Определение ориентации базисов космической съемки . . 172
§ 34. Дифференциальное уточнение орбиты по ориентирующим углам базисов фотографирования в гринвичской системе координат 180
§ 35. Точность определения орбит по ориентирующим углам базисов космической съемки 185

Глава VII. Космическая фототриангуляция с одновременным определением начальных условий движения искусствеиных спутников 190

§ 36. Система обозначений и основные соотношеиия 190
§ 37. Структура уравнений поправок 194
§ 38. Система нормальных уравнений для k-го маршрута (витка) 196
§ 39. Матрица нормальных уравнений для блока космической фототриаигуляции 199
§ 40. Вычисление матрицы изохронных производных 201

Глава VIII. Обработка фотографических наблюдений ИСЗ 204

§ 41. Основные особеиности фотографических наблюдений ИСЗ 204
§ 42. Закон тангенса. Идеальные координаты 208
§ 43. Гомографическое (коллинеариое) и аффинное преобразования 210
§ 44. Связь инструментальиых и идеальиых координат . . . 211
§ 45. Вычисление топоцентрического направления на ИСЗ . . 216
§ 46. Способ Дейча и способ Шлезингера 221
§ 47. Проективные координаты 223
§ 48. Двойное отиошение четырех точек 228
§ 49. Способ Ю. М. Трунина 230

Глава IX. Космическая фотограмметрия при изучении Луны и планет 236

§ 50. Основные задачи космической фотограмметрии при обработке результатов съемок Луны и планет 236
§ 51. Установление координат северного полюса вращения планет и нулевых меридианов 238
§ 52. Системы координат Луиы 240
§ 53. Основные соотношения лунной космической фотограмметрии 252

Приложеиие. Дополиительные сведения из теории матриц 260

Список литературы 274

Предметный указатель 275

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Урмаев Михаил Сергеевич

КОСМИЧЕСКАЯ ФОТОГРАММЕТРИЯ

Заведующая редакцией Л. Г. Иваиова
Редактор издательства Ю. В. Пронько
Технический редактор Л. Г. Лаврентьева
Корректоры Н. А. Громова, В. Т. Юдович

ИБ № 7971

Сдано в набор 16.09.88. Подписано в печать 02.02.89 Т-03337. Формат 60×88¹/₁₆
Бумага офсетная № 2. Гарнитура Литературная Печать высокая.
Усл. печ. л. 17,15. Усл. кр.-отт. 17,15. Уч.-изд. л. 17,70. Тираж 1950 экз.
Заказ 6549/1968—8. Цена 90 коп.

Ордена «Знак Почета» издательство «Недра».
125047, Москва, пл. Белорусского вокзала, д. 3.

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени МПО «Первая Образцовая типография» Союзполиграфпрома при Госкомиздате СССР.
113054. Москва, Валовая, 28.

528
У-699

М.С.УРМАЕВ

КОСМИЧЕСКАЯ ФОТОГРАММЕТРИЯ